

Refleksje

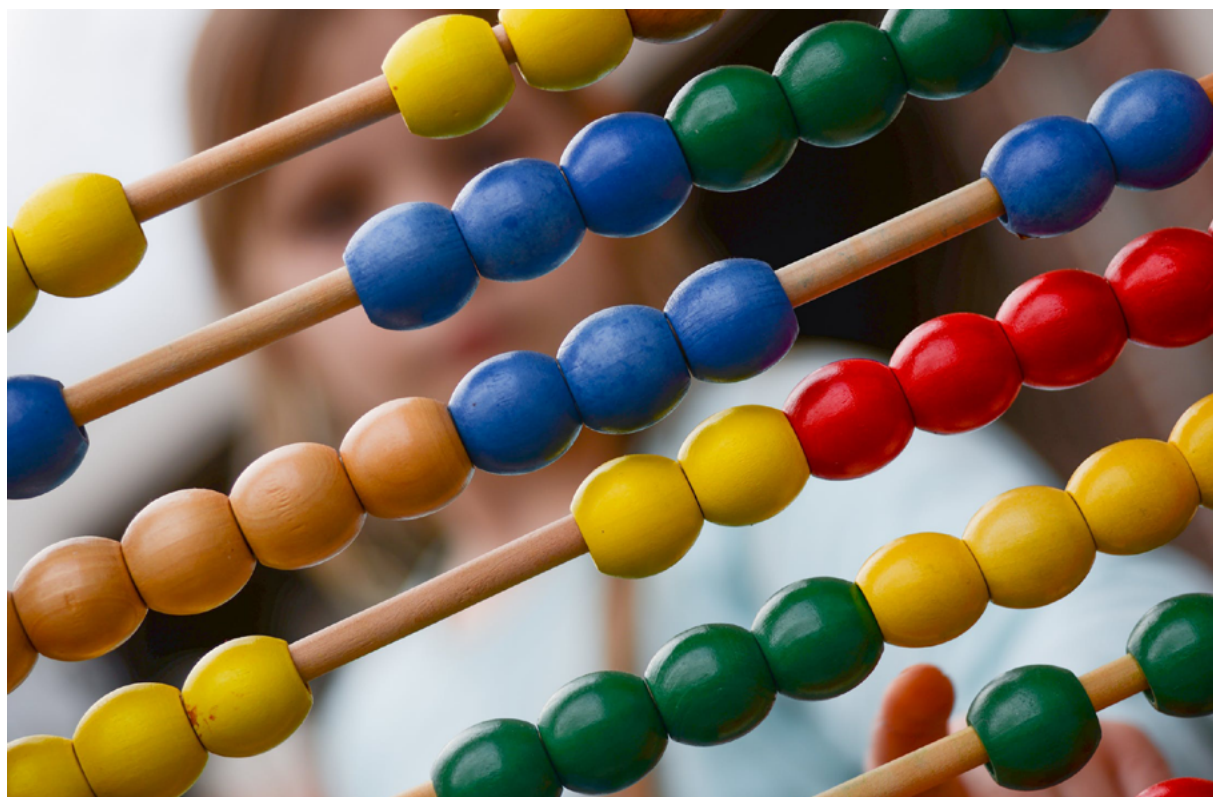
Zachodniopomorski
Dwumiesięcznik
Oświatowy
Od 1991 roku

ISSN 2450-8748

Czasopismo bezpłatne

Marzec / Kwiecień 2020

Nr 2



Temat numeru

Dydaktyka matematyki

Wywiad ze Stefanem Turnauem

**Celem jest poprawne
rozumowanie**

Michał Szurek

Protezy wyobraźni

Agnieszka Demby

**Dydaktyka matematyki
a historia matematyki**

Natalia Kędzierska

Zmniejszanie różnic

Wydawca

Zachodniopomorskie Centrum Doskonalenia Nauczycieli

Redaktor prowadzący

Sławomir Iwasiów

Sekretarz redakcji

Katarzyna Kryszczuk-Mańkowska

Skład, druk

ARGI

Zdjęcia na okładce

1 strona: www.pexels.com

3 strona: www.pl.fotolia.com

Zdjęcie na stronie 1 wykorzystano w ramach licencji CC0.

Współpraca

Natalia Cybort-Zioło, Mieczysław Gałaś, Anna Godzińska,

Waldemar Howil, Anna Kondracka-Zielińska,

Krystyna Milewska, Sławomir Osiński, Wojciech Rusinek,

Jadwiga Szymaniak

Adres redakcji

ul. Gen. J. Sowińskiego 68

70-236 Szczecin

Kontakt

tel. 91 435 06 34

e-mail: refleksje@zcdn.edu.pl

Strona internetowa

refleksje.zcdn.edu.pl

Facebook

[@refleksje.magazyn](https://www.facebook.com/refleksje.magazyn)

Nakład

1500 egzemplarzy, czasopismo bezpłatne

Numer zamknięto

13 lutego 2020 roku

Tłumaczenie

Katarzyna Bielawna



JEDNOSTKA OŚWIATOWA
SAMORZĄDU WOJEWÓDZTWA
ZACHODNIOPOMORSKIEGO

Zachodniopomorskie Centrum Doskonalenia Nauczycieli jest jednostką oświatową Samorządu Województwa Zachodniopomorskiego i posiada akredytację Zachodniopomorskiego Kuratora Oświaty.

Redakcja zastrzega sobie prawo redagowania i skracania tekstów oraz zmiany ich tytułów.

Archiwalne numery w wersji elektronicznej można bezpłatnie pobrać ze strony internetowej „Refleksji”.

Czasopismo jest dostępne również na platformie Issuu.

Od Redakcji

Na naszych łamach zagadnienia związane z przedmiotami ścisłymi – a w szczególności z nauczaniem matematyki – nie goszczą nader często. Postanowiliśmy tę sytuację zmienić, oddając w Państwa ręce numer poświęcony dydaktyce matematyki.

Polecamy wywiad z profesorem Stefanem Turnauem, wybitnym metodykiem nauczania matematyki, który współtworzył przez kilka dekad środowisko znane jako „krakowska szkoła dydaktyki matematyki”. W rozmowie profesor Turnau mówi i o swojej biografii naukowej, i relacji zawodowej z profesor Anną Zofią Krygowską, która w latach 60. XX wieku wyodrębniła w polskiej nauce dydaktykę matematyki jako samodzielną dziedzinę badań oraz praktyki akademickiej. Profesor Turnau odnosi się do

znanego wszystkim nauczycielom matematyki pytania: co takiego tkwi w matematyce, że można z niej uczynić przedmiot nie tylko zainteresowania, ale także pasji? I odpowiada: uczyć tak, żeby rozwiązywanie matematycznych problemów nie było celem samym w sobie, a jedynie pewnym punktem dojścia, który poprzedza – fascynująca! – przygoda obcowania z tym przedmiotem.

W pozostałych tekstach z działu „Temat numeru” można znaleźć artykuły o historii i teorii dydaktyki matematyki, a także cenne przykłady zadań. Z kolei w dziale „Opinie, refleksje, doświadczenia”, jak zwykle, publikujemy przemyślenia i praktyki nauczycieli z ich codziennej pracy dydaktycznej – stanowią one przede wszystkim cenne źródło wiedzy na temat tego, jak można, atrakcyjne i skutecznie, uczyć matematyki w nowoczesnej szkole.

Wynika z tych rozważań i taki wniosek: matematyka, nazywana „królową nauk”, inspiruje do rozwijania i poszerzania czasami bliskich (jak fizyka czy informatyka), a czasami nieco dalszych (jak język i literatura) obszarów edukacji.

Spis treści

WYWIAD

Sławomir Iwasiów – rozmowa ze Stefanem Turnauem
Celem jest poprawne rozumowanie 4

TEMAT NUMERU

Anna K. Żeromska
Nie zmiękczaście matematyki! 11

Agnieszka Demby
**Dydaktyka matematyki
a historia matematyki** 16

Michał Szurek
Protezy wyobraźni 26

Jerzy Kołodziejczyk
Parzystość w matematyce szkolnej 33

Krzysztof Makles
Ile jest matematyki w informatyce? 40

REFORMA SYSTEMU OŚWIATY

Natalia Kędzierska
Zmniejszanie różnic 48

OPINIE, REFLEKSJE, DOŚWIADCZENIA

Nikoła Budnicka
Jak uczyć matematyki? 55

Beata Misiak
Wbrew intuicji 58

Iwona Sobczak
Matmoformatyka 60

Marta Król
Zielona matematyka 62

Anna Kondracka-Zielińska
Wiele warstw cebuli 65

Anna Stęrzewska		WOKÓŁ POJĘĆ PEDAGOGICZNYCH	
W jednym stali domu	68		
Jadwiga Adamczewska		Jadwiga Szymaniak	
Dlaczego istniejemy?	71	Pedagogika literatury. Część 1	92
Joanna Przeobrażeńska, Klaudia Szostak		FELIETON	
Kulturowe pomosty	74		
Waldemar Howil		Wojciech Rusinek	
Lista (nie)obecności	78	18 równa się 40	99
Ewa Zakrzewska		Stawomir Osiński	
Indywidualne tempo	80	Rozważania o liczeniu	102
Małgorzata Roszak		STREFA MUZEUM	
Przyszłość (jeszcze) nie istnieje	84		
Justyna Wołoszyk-Brzezińska		Krystyna Milewska	
Odyseja Umysłu	86	Elementy kultury matematycznej	104
Michał Brzezicki		WARTO PRZECZYTAĆ	
Od dedukcji do redukcji	89	Anna Godzińska	
		Być rodzicem?	110



Czytaj nas online: refleksje.zcdn.edu.pl

Celem jest poprawne rozumowanie

z profesorem Stefanem Turnauem
rozmawia Sławomir Iwasiów

Panie profesorze, co skłoniło pana do wyboru matematyki jako kierunku studiów? Dzisiaj to zapewne dla pana sprawa oczywista, ale dla osób czytających „Refleksje” – a w wypadku tego numeru głównie dla matematyków – kwestia, jak sądzę, ciekawa.

Moje zainteresowanie matematyką, a przede wszystkim klasyczną, Euklidesową geometrią, będącą wyzwaniem dla rozumu, ukształtowało się najpierw w rzeszowskim gimnazjum, a potem rozwinęło w krakowskim liceum. Myślę, że przede wszystkim pod wpływem nauczycieli: Władysława Grabarczyka i Marii Kracińskiej. Cenili oni bardziej umiejętność konstruowania wywodu dedukcyjnego niż znajomość faktów i definicji – i to właśnie mi się spodobało. Pamiętam jeden szczegół, dla mnie ważny. Lekcja o twierdzeniu geometrii, odnoszącym się do praktycznego problemu: jak tyczkę wbić w ziemię pionowo? Wiąże się ono

ze znanym z praktyki faktem: gdy tyczkę widzą pionowo dwie osoby z dwóch różnych kierunków, to jest ona naprawdę ustawiona w pionie. Odpowiednie twierdzenie geometrii: jeżeli prosta jest prostopadła do dwóch prostych na płaszczyźnie przechodzących przez punkt, w którym przebija ona płaszczyznę, to jest też prostopadła do każdej innej prostej na tej płaszczyźnie, przechodzącej przez ten punkt. Klasyczny dowód to łańcuszek przystawań trójkątów: ponieważ..., więc trójkąt... przystaje do trójkąta..., stąd zaś wynika, że odcinek... jest równy odcinkowi... W takim razie trójkąt... jest przystający do trójkąta... i tak dalej. Zadanie domowe, przed lekcją poświęconą temu twierdzeniu, polegało na zapoznaniu się z dowodem i zrobieniu odpowiedniego modelu z kawałka kartonu, patyczka, przewleczonych i napiętych nitek, według rysunku w podręczniku. Na lekcji Maria Kracińska odpytywała „pod tablicą”;

trzeba było dowód zademonstrować, posługując się własnym modelem. Ogromnie mi się podobało i twierdzenie, i dowód, i model, i takie potraktowanie tematu. To ukierunkowało moje rozumienie matematyki, jej relacji z rzeczywistością, a pewnie też rozbudziło zainteresowanie jej nauczaniem.

Przeskoczę do teraźniejszości. Najpierw sam przeprowadziłem, a potem opisałem w „Matematyce w Szkole” (dawnym czasopiśmie Gdańskiego Wydawnictwa Oświatowego) eksperymentalne szukanie odpowiedzi na pytanie: jaką figurą może być płaski przekrój bryły? (Znalazłem też, co nie było łatwe, i zamieściłem dowód odpowiedniego twierdzenia stereometrii). Obiektem eksperymentu był piernik z prostopadłościenną foremką. Niestety, żadne reakcje nauczycieli po tym, jak i po innych artykułach nigdy do mnie nie dotarły.

Jak pan wspomina studia?

Studia matematyczne na Uniwersytecie Jagiellońskim już na wejściu zaczęły się od porażki: oblałem pisemny egzamin wstępny. Pomyliłem konstrukcję środka okręgu opisanego (był w założeniach zadania) ze środkiem okręgu wpisanego. Błąd, który wcześniej, a i potem popełniałem wiele razy: niedoczytanie i nieprzeanalizowanie tematu zadania. Ale „poprawkę” zdałem bez problemu. Po tej wpadce postanowiłem być solidnym studentem, między innymi nie opuszczać żadnych zajęć – to było oczywiste i do końca się tego trzymałem. Wymyśliłem też sposób na notowanie wykładów: ile się dało w czasie wykładu, to znaczy głównie tak zwane robaczki, resztę zapisywałem z pamięci w domu w osobnym zeszycie – w tym postanowieniu wytrwałem do końca algebry, ale już nie stosowałem na innych przedmiotach. Szkoda.

Przed egzaminem z geometrii było ustne kolokwium z rozwiązywania zadań konstrukcyjnych u asystenta, magistra Zbigniewa Przybylskiego. Trzeba było przedstawić rozwiązania zadań wskazanych z długiej listy rozdanej ze dwa tygodnie wcześniej. Pewny siebie, do kolokwium się nie

przygotowywałem. „Nie wie pan? To proszę sięść przy tamtym stoliku i znaleźć rozwiązanie”. Po pół godzinie byłem gotów i kolokwium zdałem. Zadania konstrukcyjne rozwiązywałem zawsze z dużą przyjemnością. Dodam tu uwagę ogólną: w matematyce można czegoś nie wiedzieć, gdy się ma czas na rozumowe znalezienie odpowiedzi. Oczekiwanie natychmiastowej odpowiedzi ucznia na zadane pytanie jest wbrew istocie matematyki.

Wiem, że w szkole uczył pan też fizyki. Czy studia matematyczne przygotowały pana do tej roli?

W pewnej mierze tak, ale głównie rozbudziły zainteresowanie fizyką. Moje ulubione zajęcia to wykład fizyki doświadczalnej profesora Henryka Niewodniczańskiego oraz ćwiczenia w pierwszej pracowni fizycznej. Gdy jakieś ćwiczenie mi nie wyszło – mój wynik nie zgadzał się z prawidłowym – zgłaszałem chęć jego powtórzenia. Byłem ciekaw, na jakim etapie zrobiłem błąd i na czym on polegał. Do egzaminu ustnego u profesora uczyłem się z zaleconego przez niego rosyjskiego podręcznika Frisza i Timoriewy. Polskiego aktualnego – fizyka rozwija się wszak błyskawicznie – podręcznika nie było, a tego stos leżał w księgarni, w dodatku za bezcen. Był to mój pierwszy kontakt z językiem rosyjskim.

Bardzo się ucieszyłem, gdy najpierw jako nauczyciel liceum w Miechowie, a potem w Krakowie mogłem, prócz matematyki, uczyć fizyki i prowadzić zajęcia w szkolnej pracowni fizycznej.

Dlaczego po studiach nie został pan, jako asystent, na uniwersytecie?

Trzyletnie studia ukończyłem z dyplomem I stopnia (teraz nazywa się to licencjatem) i trzema opcjami: dwuletnią kontynuacją i stopniem magistra, nakazem pracy i... studiami na kierunku filozofia. Wybrałem to trzecie. Może przez wrodozoną przekorę, może w poczuciu braku talentu matematycznego? Ojciec o moim głupim wyborze

nie wiedział – był przekonany, że na studia magisterskie nie przyjęto mnie z powodu „obszarniczego pochodzenia”. Odpowiedź na podanie nie przychodziła. Nie upominałem się i chętnie przyjąłem nakaz pracy ze skierowaniem do Kuratorium w Przemyślu. Przez najbliższe dwa lata byłem nauczycielem matematyki w Liceum Pedagogicznym w Rzeszowie, gdzie akurat był wolny etat.

Do pracy w tym zawodzie – wtedy myślałem, że to mój zawód na resztę życia – podszedłem bardzo sumiennie. Z wykładów profesora Franciszka Urbańczyka pamiętałem, jak przygotowywać się do lekcji, i starałem się tę wiedzę wcielać w praktykę. Do każdej lekcji miałem konspekt z planem, wybranymi zadaniami – do zrobienia w szkole i w domu, nazwiskami uczniów przewidzianych do „pytania” i innymi notatkami. Z upływem czasu i rosnącym doświadczeniem objętość konspektów sukcesywnie malała. Ale zdarzało się, że i rosła, gdy podejmowałem nowe wyzwania. Pamiętam każdorazowe radosne oczekiwanie na powrót do szkoły pod koniec wakacji, kiedy będę mógł wdrażać nowe pomysły matematyczno-dydaktyczne. W zapomnienie szły nauczycielskie niepowodzenia i rozczarowania, zawsze wydawało mi się, że w nowym roku szkolnym będzie dobrze.

Po dwóch latach spędzonych w Rzeszowie podjąłem na rok pracę w liceum w Miechowie, a potem w technikum rolniczym w Dąbrowicy koło Bochni. Uczyłem matematyki i fizyki, ale też okazjnie innych przedmiotów, traktując to jako ciekawe wyzwanie.

Jak znalazł się pan w katedrze profesor Anny Zofii Krygowskiej?

W czerwcu 1958 ukończyłem piąty rok mojej pracy i mieszkania poza Krakowem. Tato, zawsze niezadowolony z mojego „ugrzężnięcia” w szkole, najwyżej ceniący karierę akademicką, nie zasypiał gruszek w popiele. Przypadkiem, czy w wyniku poszukiwań, dowiedział się, że Zofia Krygowska

właśnie tworzy zakład metodyki nauczania matematyki w Państwowej Wyższej Szkole Pedagogicznej i poszukuje odpowiednich współpracowników. Nie miałem stopnia magistra, jednak zostałem przyjęty z warunkiem uzyskania magisterium do października 1959 roku. Pracę asystenta od początku roku akademickiego 1958/59 łączyłem z nauczaniem matematyki w także nowym, bo powstałym w 1957 roku, XIII Liceum przy ulicy Westerplatte, prowadzonym przez Towarzystwo Szkoły Świeckiej. Jednocześnie kontynuowałem eksternistyczne studia magisterskie.

Pana biografia naukowa jest związana ze środowiskiem znanym jako „krakowska szkoła dydaktyki matematyki”. Jak ono powstało?

Lata 50. i 60. były okresem wielkich zmian w poglądzie na matematykę szkolną i jej nauczanie, obejmujących cały Zachód, ale też Węgry, Rumunię, no i Polskę. Miałem poczucie, że w nich uczestniczę. Byłem pod silnym wpływem profesor Krygowskiej, od niej i pod jej kierunkiem poznawałem te nowe idee i starałem się je przekazywać studentom oraz wdrażać na lekcjach. Słuchałem jej wykładu dla studentów, z którego potem zrodził się *Zarys dydaktyki matematyki*, a dla uczniów XIII Liceum przygotowywałem odbijane na powielaczu fragmenty tworzonego przez nią podręcznika geometrii. W ramach zajęć praktycznych chodziłem ze studentami do szkół i obserwowałem lekcje – tak studentów, jak i nauczycieli. Bardzo ostro krytykowałem lekcje z tej nowej perspektywy. Po latach sobie uświadomiłem, że taka krytyka nie służyła niczemu dobremu. Poza tym to, co wtedy zdawało mi się lepsze, nie było takie w pełni. Jednak wspominając tamte czasy, widzę siebie bardzo zaangażowanego w unowocześnianie nauczania matematyki, jednocześnie na obu polach – w uczelni i w szkole.

Jako pierwszy, obok Stanisława Serafina, asystent profesor Krygowskiej byłem uczestnikiem tworzenia się środowiska, które potem profesor

Hans Freudenthal z uniwersytetu w Utrechcie nazwał „krakowską szkołą dydaktyki matematyki”. Skupiało ono pracowników uczelni i nauczycieli matematyki zainteresowanych „uwspółcześnianiem” szkolnej matematyki i konstruktywistycznymi metodami pracy z uczniami. Wśród środowisk dydaktyków matematyki innych krajów „krakowską szkołę” wyróżniało „kompromisowe” podejście do zmian, tak w aspekcie matematycznym, jak i dydaktycznym. Pojęcia tak zwanej matematyki współczesnej były w tym podejściu wtopione w tematykę tradycyjną. Jednocześnie nowe środki dydaktyczne, takie jak „materiały manipulacyjne”, były wprowadzane do szkół wraz z zalecaną nauczycielom zmianą ich roli z przekazu gotowej wiedzy na kierowanie procesem tworzenia wiedzy przez samych uczniów na podstawie organizowanej przez nauczyciela aktywności. Przeszkodą w szerszej realizacji takiego nauczania było nieprzygotowanie nauczycieli, zarówno tych doświadczonych i przyzwyczajonych do tradycyjnej szkolnej matematyki i pedagogiki, jak też dopiero wchodzących do zawodu po ukończeniu wciąż tradycyjnych studiów.

Jak przebiegała pana dalsza kariera akademicka?

W roku 1968 otrzymałem w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Katowicach stopień naukowy „doktora nauk matematycznych w zakresie ich dydaktyki” za pracę zatytułowaną *Rysunek i znak graficzny jako niewerbalne środki nauczania matematyki*. Był to historycznie pierwszy doktorat matematyczny dla dydaktyka, za dysertację niebędącą pracą matematyczną, nadany na podstawie zarządzenia ministra Henryka Jabłońskiego. Zarządzenie to jest dzisiaj oczywiście nieaktualne, a uczelnie różnie radzą sobie z doktoryzowaniem dydaktyków matematyki.

W roku 1979 Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Wrocławskiego nadał mi stopień doktora habilitowanego z tej samej co

doktorat specjalności – także historycznie pierwszy – na podstawie książki równie, a może bardziej odległej od matematyki, pod tytułem *Rola podręcznika w kształceniu pojęć i rozumowań matematycznych na poziomie pierwszej klasy ponadpodstawowej*. Recenzentami byli matematycy. Świadom faktu, że to, czym się zajmuję, nie mieści się w żadnej specjalności naukowej oficjalnie uprawianej przez polską uczelnię lub instytucję naukową, nie zabiegałem o naukowy tytuł profesora. Status dydaktyki matematyki, dziedziny typowo interdyscyplinarnej, nie został dotąd w Polsce uregulowany. Habilitacje dokonywane są na wydziałach pedagogicznych lub nadawane na podstawie stopni naukowych uzyskiwanych w instytucjach zagranicznych.

Wspomnieliśmy już, że był pan studentem, doktorantem i współpracownikiem profesor Krygowskiej. Jaką była osobowością naukową? Jakie jej osiągnięcia uważa pan za najdonioślejsze?

Profesor Krygowska przez całe życie oddawała się pasji matematyka. Może to brzmieć dziwnie dla osób, które znały drugą stronę jej aktywności: ogromne intelektualne i emocjonalne zaangażowanie w problemy myślenia i uczenia się matematyki przez dzieci. Było to możliwe i bardzo wydajne dlatego, że zainteresowania matematyczne i matematyczna twórczość profesor Krygowskiej były w pełni zintegrowane z zainteresowaniami i twórczością w dziedzinie nauczania matematyki.

Prawdziwym celem nie był dla niej nigdy wynik matematyczny jako taki; były to zagadnienia dotyczące matematycznych rozumowań dzieci, uczniów i szkoły. Taki cel sprawiał, że interesowały ją przede wszystkim matematyczne problemy, tak czy inaczej związane z nauczaniem, zaś po każdym dokonaniu w zakresie matematyki następowała uporządkowana refleksja i dokładna analiza przebytej drogi.

Ten aspekt matematycznego umysłu profesor Krygowskiej ujawnił jej wykład *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać istotną rolę w kształceniu matematycznym dla wszystkich*, wygłoszony na sympozjum zatytułowanym „Matematyka dla wszystkich”, które w ramach Międzynarodowego Kongresu Matematycznego odbyło się w Warszawie w roku 1983. Profesor Krygowska wymieniła wówczas istotne, choć ukryte składniki aktywności matematycznej, za które uznała: analogię, schematyzowanie, definiowanie, dedukowanie i redukowanie, kodowanie, wreszcie algorytmizowanie.

W latach 1991–2007 był pan redaktorem czasopisma „Dydaktyka Matematyki”. W jakich warunkach – społecznych i naukowych – to czasopismo powstało? Jak, i z jakich przyczyn, zmieniał się w przestrzeni lat?

Czasopismo „Dydaktyka Matematyki” zostało założone w roku 1980 przez profesor Krygowską jako wydawnictwo, V Seria, Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Publikowane w nim były prace badawcze z dydaktyki matematyki polskich dydaktyków, a także obszernie sprawozdania z zagranicznych konferencji oraz tłumaczenia lub streszczenia wygłaszanych na nich ważnych prac obcojęzycznych i referatów. Czasopismo było adresowane do polskiego środowiska akademickiego badaczy matematyki i zainteresowanych tą problematyką nauczycieli matematyki. Profesor Krygowska była od lat 50. aktywną uczestniczką ruchu „nowej matematyki”, który prócz proponowania innowacyjnych treści i metod nauczania tworzył nową dziedzinę badań nad nauczaniem matematyki, czyli dydaktykę matematyki. Powstawała ona z niczego, jako dziedzina odrębna względem dydaktyki ogólnej, wchodzącej w skład pedagogiki. Tematyka jej badań, nauczanie i uczenie się matematyki, rodziła się z naturalnej potrzeby, nie miała

natomiast metodologii i narzędzi badawczych, które trzeba było adaptować lub tworzyć. Ta dyscyplina rozwijała się na międzynarodowych spotkaniach, w których uczestniczyli matematycy, pedagodzy, psychologowie i nauczyciele. Profesor Krygowska w swoich referatach i przez udział w dyskusjach istotnie przyczyniła się do jej kreacji. Między innymi była zwolenniczką traktowania wspólnej z uczniem pracy nad rozwiązaniem problemu jako podstawowej metody badawczej. „Dydaktyka Matematyki” była pierwszym poświęconym tej tworzącej się dziedzinie polskim czasopismem naukowym.

Po wejściu Polski do Unii Europejskiej pojawił się postulat, by wszystkie czasopisma naukowe publikowały w języku angielskim, udostępniając w ten sposób polskie dokonania całemu naukowemu światu. Uznano, że „Dydaktyka Matematyki”, publikująca także polskie prace badawcze z zakresu dydaktyki matematyki, powinna być publikowana w języku angielskim. To było, z jednej strony, korzystne dla autorów tych prac, którzy „wyszliby z cienia”, ale, z drugiej strony, oczywiście sprzeczne z intencjami założycielki pisma, które miało przede wszystkim przybliżać zachodnie idee polskim nauczycielom i badaczom. Jednak redakcja nie miała tu głosu decydującego. „Dydaktyka Matematyki” przekształciła się w angielskojęzyczne czasopismo „Didactica Mathematicae” z międzynarodowym komitetem redakcyjnym, publikujące prace z zakresu dydaktyki matematyki nadsyłane przez autorów polskich i zagranicznych. Obecnie czasopismo przeżywa kryzys.

Mam taką tezę: uczenie matematyki, zarówno siebie, jak i innych, wpływa pozytywnie na osobowość – uczy precyzji, sumienności, wytrwałości. Jak pan postrzega rolę matematyki w pedagogice?

Od dawna powtarzam, że matematyka nie jest takim samym przedmiotem nauczania jak

inne. Tego nie uwzględnia dydaktyka ogólna, będąca częścią pedagogiki, formułując ogólne zasady nauczania, z założenia odnoszące się do wszystkich przedmiotów nauczania, w tym do matematyki.

Różnica polega przede wszystkim na tym, że w innych przedmiotach głównym celem nauczania jest opanowanie przez uczniów wiedzy – co przekłada się na znajomość nazw obiektów i ich „naukowych” własności – gdy w matematyce zasadniczym celem jest rozwinięcie myślenia matematycznego, z użyciem nie tylko wiedzy o matematycznych obiektach i specyficznych języków, w tym języka algebry, ale też logicznego rozumowania. Na przykład nie myśli matematycznie uczeń, który na pytanie: „Czy czworokąt o równych przekątnych jest prostokątem?” odpowiada: „Tak, bo prostokąt ma równe przekątne”. Matematycznie myślący uczeń, który z tym pytaniem spotyka się po raz pierwszy, może odpowiedzieć: „Nie wiem. Spróbuję poszukać czworokąta, który ma równe przekątne, ale nie jest prostokątem”.

Chciałbym, żeby polski uczeń na pytanie zadawane przez nauczyciela często reagował słowami: „Chwileczkę, muszę pomyśleć”. Myślenie matematyczne to przede wszystkim zadawanie sobie pytań i szukanie logicznej odpowiedzi. Zaś odpowiedź „nie wiem” nie powinna być powodem do wstydu lub lęku przed konsekwencjami braku wiedzy. W nauczaniu skierowanym na rozwijanie myślenia matematycznego brak wiedzy może być impulsem do podjęcia szukania odpowiedzi, a więc właśnie rozwijania tego myślenia. Uczeń, który nie pamięta wyniku 7 razy 8, może być zachęcony do jego znalezienia na przykład w ten sposób: „wiem, że 7 razy 7 to 49; 7 razy 8, czyli 8 razy 7, będzie o 7 większe, czyli 49 plus 7, a to jest 56”. Znalezienie odpowiedzi czasem nie jest łatwe – dlatego takie sytuacje wymagają wytrwałości w poszukiwaniu i tym samym wytrwałość kształtują.

Czy dobrze rozumiem pana podejście, że w uczeniu się matematyki robienie błędów jest naturalne i stanowi bardzo ważny element procesu dydaktycznego?

Potocznie rozumiany błąd to niezgodność odpowiedzi do zadania z właściwą, na przykład podaną przez nauczyciela lub podręcznik. Jednak naprawdę błąd pojawił się wcześniej, w trakcie rozwiązywania zadania i – jeżeli nie jest zwykłą pomyłką – polega na niepoprawnym rozumowaniu czy niestosowaniu się do reguły – w rachunku liczbowym lub algebraicznym. W nauczaniu skierowanym na rozwijanie myślenia matematycznego bardzo ważne jest pobudzenie ucznia do pytania: „Co zrobił(a)m źle?” i szukania na nie odpowiedzi. Sam też robię błędy i zawsze szukam miejsca, w którym go popełniłem. O błędzie na egzaminie wstępnym na Uniwersytecie Jagiellońskim wiedziałem zaraz po wyjściu z sali, a chwilę potem – na czym polegało moje błędne myślenie. Analizowanie, z uczniami lub przez nich samych, rozwiązań, które doprowadziły do błędu, uważam za pozytywny element dydaktyki. Rozpowszechniona opinia, że zamiast analizować rozwiązanie lepiej w tym czasie rozwiązać więcej zadań, niekoniecznie jest słuszna.

Jak pan z perspektywy czasu postrzega swój wkład w rozwój dyscypliny? Na ile badania w zakresie dydaktyki matematyki przyniosły panu satysfakcję naukową?

Zajmowałem się dydaktyką matematyki, czyli analizowaniem i badaniem procesu uczenia się i nauczania tego przedmiotu. Mój wkład w nią nie jest imponujący. Moja aktywność zawodowa polegała głównie na nauczaniu, studentów i czynnych nauczycieli, dydaktyki matematyki (tej wciąż tworzonej i rozwijającej się) i nauczaniu matematyki w sposób zgodny z moją wiedzą i poglądami z dydaktyki matematyki. Tę wiedzę i poglądy starałem się też wcielać w tworzonych – wspólnie z koleżankami i kolegami – szkolnych podręcznikach matematyki. Moje publikacje książkowe i w czasopiśmie były kierowane

głównie do nauczycieli matematyki, czynnych lub przyszłych, a zawierały uszczegółowienie lub rozwinięcie wskazań dydaktyki matematyki.

Pyta pan, czy mam z tej działalności satysfakcję. I tak, i nie. Cała ta moja różnorodna aktywność była wielką przygodą intelektualną. A cóż może dawać większą satysfakcję od poczucia, że się taką historyczną przygodę przeżywa? Miałem też poczucie misji, a sukces misji to – tak go rozumiem – szerokie wcielenie w życie głoszonych idei, wiedzy, zasad. Tej satysfakcji nie mam. Moje podręczniki miały krótki żywot, nie zyskały dostatecznie szerokiego uznania środowiska nauczycielskiego. A może my, jako autorzy, nie umieliśmy ich do naszych koncepcji przekonać? Dzisiejsze nauczanie matematyki na poziomie podstawowym, mam z nim bliski kontakt, daleko odbiega od idei i zasad głoszonych przez dydaktykę matematyki, które kiedyś starałem się przekazywać uczącym. Jednak – wracam do tej satysfakcji z przygody – nie żałuję ani tego, że studiowałem matematykę, ani tego, że zamiast próbować zasłużyć się w matematyce, wolałem pracować nad ulepszeniem jej nauczania.

Jaka będzie, pana zdaniem, przyszłość dyscypliny? W jakich kierunkach może się rozwijać dydaktyka matematyki? Na ile będzie miało to związek z wdrażaniem nowych technologii?

Nowe techniki wizualizacji, tworzenia i powielania tekstów czy użycia koloru wpłynęły na pracę nauczyciela i ucznia w klasie oraz w domu. Uwalniają ich od czynności dawniej wykonywanych ręcznie, zwiększają tempo pracy, podnoszą estetykę wytworów. Jednak coś za coś: obserwowane są trudności uczniów z czytelnym i uporządkowanym sformułowaniem rozwiązania zadania albo wykonaniem użytecznego rysunku sytuacji danej w zadaniu geometrycznym.

Są też nowe środki dydaktyczne sprzyjające konstruktywistycznej filozofii pedagogicznej. Należą do nich, na przykład, programy Cabri i GeoGebra, umożliwiające eksperymentalne

poznawanie pojęć geometrii i szukanie rozwiązań problemów. Przyszłość w nauczaniu matematyki mają też – moim zdaniem – gry wideo, oczywiście odpowiednio skonstruowane. Ich istotną zaletą jest to, że do grania nie trzeba uczniów namawiać. A jeżeli obmyślanie strategii wygrania jest myśleniem matematycznym – czegoż więcej trzeba?

Dydaktyka matematyki wciąż rozwija się w dwóch nurtach: jako szeroka dziedzina badań nad myśleniem matematycznym, jego kształtowaniem i wspomaganiem, a także jako ruch entuzjastów, dla których matematyka bywa intelektualną przygodą, starających się, by taką przygodę dostrzegło w niej jak najwięcej uczniów. Razem spotykają się jedni i drudzy na krajowych i międzynarodowych konferencjach, dzieląc się wynikami badań, nauczycielskimi sukcesami i... porażkami.

W czerwcu tego roku w Gdańsku odbędzie się konferencja z cyklu Contemporary Mathematics Education (Współczesne Nauczanie Matematyki), której tematem jest Critical thinking in mathematics: Perspectives and challenges (Krytyczne myślenie w matematyce: Perspektywy i wyzwania). Więcej o konferencji można znaleźć na stronach: www.cme.rzeszow.pl oraz <https://www.facebook.com/didactics.maths/>.

Stefan Turnau

Doktor habilitowany w zakresie dydaktyki matematyki. Naukowo związany z Uniwersytetem Pedagogicznym im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie. Autor wielu publikacji książkowych i artykułów naukowych w obszarze dydaktyki matematyki. Opublikował między innymi książki: *Rola podręcznika w kształceniu pojęć i rozumowań matematycznych na poziomie pierwszej klasy ponadpodstawowej* (1978), *Logiczny wstęp do matematyki* (1974, 1984), *Wykłady o nauczaniu matematyki* (1990), *Cabri i czworokąty* (1994). Autor oraz współautor podręczników do nauczania matematyki.

Nie zmiękczaście matematyki!

Anna K. Żeromska

O wybranych tezach naukowych Anny Zofii Krygowskiej

Matematyka – zarówno w ujęciu naukowym, jak i edukacyjnym – jest szczególnym rodzajem wiedzy. Ta specyfika, bez wątpienia, wpływa na opinię, iż matematyka to dziedzina wyjątkowo trudna i dla wielu osób niedostępna. Funkcjonuje także wiele poglądów na temat wymagań, jakie powinna spełniać szkolna edukacja matematyczna. U ich podstaw leży wiara, że dobre wykształcenie w zakresie matematyki nie jest łatwo osiągalne, ale przynosi korzyści i jednostkom, i społeczeństwom. Rozważania w tym zakresie nieuchronnie zahaczają o rozmaite

kwestie, którymi od dawna zajmują się dydaktycy matematyki, prowadząc badania teoretyczne i empiryczne, dotyczące możliwości i ograniczeń procesu nauczania-uczenia się matematyki. Początki tak ukierunkowanych analiz sięgają odległej już historii, a ich znamienna intensyfikacja nastąpiła pod koniec XIX wieku. Od tej pory badania dotyczące edukacji matematycznej prężnie rozwijały się na całym świecie. W Polsce dydaktyka matematyki również rozkwitała, głównie dzięki pracy profesor Anny Zofii Krygowskiej, prekursora w tej dziedzinie.

Zmiany i przesunięcia

Konieczność powszechnego kształcenia matematycznego – tak w Polsce, jak i na świecie – nie podlega dyskusji. Natomiast ciągłych, głębokich i wieloaspektowych dyskusji wymaga sprecyzowanie wspólnego (dla osób zainteresowanych procesem kształcenia matematycznego i potencjalnymi jego rezultatami) poglądu na temat tego, czym powinna być matematyka szkolna, aby mogła stanowić element kształcenia, przynoszącego głównie pozytywne efekty. Ważne jest też założenie, że chcemy mówić nie o „nauczaniu matematyki”, ale bardziej o „kształceniu przez matematykę”¹. Wspomniana idea Krygowskiej dotyczy przekonania, iż prawdziwe kształcenie przez matematykę powinno zawierać elementy rozwijające matematyczną twórczość na każdym, nawet najniższym etapie edukacji. Postulat ujęcia matematyki w dużej części jako działalności twórczej wywoływał za czasów Pani Profesor – ale i współcześnie – dyskusje na temat możliwości jego realizacji.

Znajduje to swoje odzwierciedlenie w rozmaitych zmianach i przesunięciach w szkolnym programie kształcenia matematycznego. U podłoża zmian leży próba dostosowania specyficznego charakteru wiedzy matematycznej i jej abstrakcyjnej natury do możliwości poznawczych uczniów. Niektórzy uczestnicy polemiki twierdzą, że należy przejść na nauczanie bardziej konkretne, przekazywanie wiedzy quasi-empirycznej lub intuicyjnej. Takiemu kierunkowi wyraźnie sprzeciwiała się Krygowska, artykułując wskazanie cytowane w tytule niniejszego opracowania: „nie zmiękczać matematyki!”². Stefan Turnau wspomina, iż zdanie to Profesor Krygowska wygłosiła po swoim wykładzie na sympozjum zatytułowanym „Matematyka dla wszystkich”, które odbyło się 16–24 sierpnia 1983 roku w Warszawie w ramach Międzynarodowego Kongresu Matematycznego. W trakcie wykładu,

zatytułowanego *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać istotną rolę w kształceniu matematycznym dla wszystkich*, Pani Profesor wymieniła składniki aktywności matematycznej, które jej zdaniem trafnie wpisują się w koncepcję matematyki twórczej³. Po wykładzie nastąpiła ożywiona dyskusja, koncentrująca się na stwierdzeniu, że matematyka abstrakcyjna jest zbyt trudna dla większości uczniów i należy zmienić jej charakter na bardziej konkretny. W trakcie tej dyskusji Krygowska powtórzyła z pasją: „nie zmiękczać matematyki!”.

Stefan Turnau interpretuje znaczenie określenia „zmiękczenie matematyki” następująco: „Widzę teraz dwa, w pewnym sensie przeciwne, znaczenia »zmiękczenia« matematyki. Jedno to powierzchowny formalizm: zredukowanie matematyki do gotowych procedur symbolicznych i sztywnych schematów rozwiązywania typowych zadań. A drugie to przesunięcie nauczania w stronę dziedziny quasi-eksperymentalnej i pseudo-intuicyjnej. Oba te kierunki mają na celu uczynić matematykę dostępniejszą dla wszystkich uczniów. I oba odciągają ten przedmiot od nauki, którą uważamy za uniwersalnie użyteczną. Profesor Zofia Krygowska, matematyk i pedagog, bez wątpienia sprzeciwiłaby się obydwu”⁴.

Uczenie myślenia

Przypomnijmy w tym miejscu, że w latach siedemdziesiątych odwrócono się od francuskiego eksperymentu zwanego „nową matematyką” („matematyka bourbakistowska”) wdrożonego na fali reform z lat sześćdziesiątych⁵. W Polsce ten odwrót wyraźnie było widać na przykład w konstrukcji programu nauczania dla liceum ogólnokształcącego z roku 1984. Idea „matematyki dla wszystkich” leżąca u podstaw wniosków, które wyciągnięto po reformach lat sześćdziesiątych, była istotnym czynnikiem mającym wpływ na wspomnianą dyskusję w ramach Międzynaro-

dowego Kongresu Matematycznego. Polemika toczyła się wokół pytania: co właściwie znaczy założenie „matematyka dla wszystkich”?

Rozumienie tego hasła może być różnorakie, na przykład może znaczyć takie dostosowanie (spłylenie) treści kształcenia matematycznego, które będą dostępne dla „wszystkich”. Temu właśnie pogładowi sprzeciwiała się Profesor Krygowska.

W dwóch wywiadach prasowych opublikowanych w latach osiemdziesiątych, zatytułowanych: *Matematyka – czy tylko dla wybranych?* oraz *W czystym powietrzu matematyki*, Anna Zofia Krygowska precyzuje niektóre swoje poglądy dotyczące rozważanej kwestii. Na pytanie dziennikarza: „Czy – żeby uniknąć wszechobecných trudności w uczeniu się matematyki – nie należałoby jej w szkole ograniczyć do treści bezpośrednio przydatnych w życiu człowieka?”, Pani Profesor odpowiada: „W niektórych krajach świata (np. w USA) próbowano ograniczyć matematykę tylko do informacji, które są niezbędne na co dzień. Bardzo szybko jednak z tego rezygnowano. Jeśli przyjmiemy taki minimalizm jako zasadę nauczania, to szybko dojdziemy do ukształtowania społeczeństwa, w którym będzie bardzo wybitna elita intelektualna i olbrzymia masa ludzi o niskim poziomie umysłowym. I ta przepaść będzie się pogłębiać”. Natychmiast padła riposta dziennikarza: „To przecież naturalna selekcja ludzi. Do zrozumienia matematyki niezbędne są szczególnie uzdolnienia, a ma je tylko niewielki procent ludzi”. Profesor Krygowska odpowiedziała: „Właśnie z tym się nie zgadzam! Aby być twórczym matematykiem, trzeba mieć oczywiście potrzebne zdolności i nikt tego nie kwestionuje. Ale co do tego, żeby za pomocą matematyki uczyć się myślenia, nie potrzeba specyficznych zdolności. Tyle że to nie ma być nauczanie matematyki, tylko rozwijanie pewnej aktywności typu matematycznego”. Dziennikarz rozmawiający z Panią Profesorem drąży dalej: „W każdej klasie widać jednak, że pewne

dzieci są zdolniejsze do matematyki, a inne np. do przedmiotów humanistycznych. Czy z góry zakłada się w dydaktyce matematyki, że część uczniów nie nadąży za programem i w rezultacie »odpadnie« wcześniej czy później?”. Profesor Krygowska odpowiada: „Może nadążyć, jeżeli zmienimy sposób nauczania i dostosujemy programy do tego, czego potrzebuje przeciętny uczeń, jeżeli nauczyciel będzie nastawiony na rozwijanie aktywności matematycznej. Twierdzę, że dziecko przeciętnie inteligentne potrafi być matematycznie aktywne, potrafi się rozwijać pod wpływem matematyki, jeżeli nie tylko nauczyciel właściwie rozumie swoją rolę, ale i cały system szkolny zapewnia mu możliwość pełnienia tej roli”.

To ostatnie stwierdzenie idzie w sukurs pogładowi niektórych uznanych psychologów mówiących o tym, że: „Każde dziecko, na każdym etapie rozwoju, można nauczyć efektywnie każdego przedmiotu, podawanego w określonej formie, rzetelnej pod względem intelektualnym”⁶ lub: „Każdy normalny uczeń jest zdolny do poprawnego rozumowania matematycznego, jeżeli odwołamy się do jego aktywności i jeżeli uda nam się usunąć zahamowania emocjonalne, które często wywołują poczucie niższości na lekcjach z tej dziedziny wiedzy”⁷.

Na kolejne pytanie prowadzącego wywiad: „Kto ma przekonać nauczyciela, że może uczyć inaczej, ciekawiej?”, Profesor Krygowska odpowiada: „Trzeba ich kształcić! Kształcenie, kształcenie i jeszcze raz kształcenie. Nauczyciel wychodzi z wyższej uczelni po innej dydaktyce. Tam jest przede wszystkim wykład. Pytałam kiedyś dzieci, kogo uważają za dobrego nauczyciela. Dziecko uważa, że najlepszy jest ten, który dobrze wyłoży, który dobrze wytłumaczy. I rodzice tak samo uważają. Tymczasem, nie ten jest najlepszy, który dobrze wytłumaczy, ale ten, który stworzy taką sytuację problemową, że dziecko samo zrozumie o co chodzi, przy pomocy nauczyciela oczywiście. To jest ideał nowoczesnej dydaktyki”.

Trudności i niepowodzenia

Cytowane poglądy Anny Zofii Krygowskiej nie straciły aktualności. W literaturze dydaktycznej polskiej i zagranicznej można znaleźć wiele opracowań, popartych badaniami, koncentrujących się na przyczynach niepowodzeń uczących się matematyki. I niestety wiele z nich za te niepowodzenia obwinia nauczycieli, nie uczniów. Jednym z niezbędnych składników nauczania matematyki, które ma się kończyć sukcesem, jest aktywna postawa ucznia w procesie uczenia się. O tym mówi Profesor Krygowska we wspomnianych wcześniej wywiadach. Stwierdza: „Trudność polega na tym, że dobrze matematycznie kształcić nie można ani przez przekazywanie matematycznej wiedzy i opowiadanie o matematycznej metodzie, ani przez wyuczanie się definicji, twierdzeń, reguł i ćwiczenie sprawności w rozwiązywaniu stereotypowych zadań. Warunkiem kształcenia przez matematykę jest osobiste zaangażowanie ucznia w ten proces, jest bardzo zróżnicowana jego matematyczna aktywność. Aktywność matematyczna może być prowokowana i organizowana przez nauczyciela na różnych poziomach i w różnych formach, od matematycznych gier poczynawszy do abstrakcyjnych problemów. Bez samodzielności nie ma matematycznej aktywności! Uczeń rozwiązujący samodzielnie zadanie potrzebuje czasu i atmosfery wolnej od nacisków różnego typu, charakteryzujących ciągle stosunek szkoły i domu do jego pracy”.

Zatem to nie po stronie niewystarczających możliwości umysłowych uczniów należy szukać przyczyn ich trudności i niepowodzeń. Raczej wina leży w dużej mierze w nieadekwatnym doborze metod i sposobów nauczania.

Kultura matematyczna

W innych swoich publikacjach Profesor Krygowska rozszerza swój pogląd, przyznając, że w samej matematyce, w jej naturze, tkwią pewne obiek-

tywne trudności, mogące stanowić specyficzne przeszkody w uczeniu się tej dziedziny. Te cechy charakterystyczne dla matematyki to przede wszystkim jej „abstrakcyjny charakter, wieloaspektowość pojęć matematycznych”, konieczność „kodowania i odkodowywania informacji” zapisanych przy użyciu „tekstu matematycznego”, posługiwanie się „metodą matematyczną” przy uzasadnianiu stwierdzeń ogólnych itd.

Ta specyfika matematyki odróżnia ją od innych nauk i może być źródłem problemów związanych z konstytuowaniem się wiedzy w umysłach osób uczących się. Na szczególną uwagę zasługuje również rola „przeszkód epistemologicznych” w kształtowaniu się matematycznej wiedzy⁸. Osoba ucząca się natrafia na nią, gdy jej dotychczasowa wiedza jest w konflikcie z uzyskaną nową informacją, a pokonanie tej przeszkody wymaga istotnej zmiany dotychczasowego rozumienia danego zagadnienia. Przeszkody epistemologiczne dotyczą rozwoju wiedzy matematycznej w jej aspekcie teoretycznym, który w tym przypadku jest bardzo odrębny w stosunku do wiedzy potocznej, opartej na konkretach. O występowaniu przeszkód omawianego rodzaju świadczą uporczywe błędy, skłonności i przekonania na temat niektórych obiektów matematycznych osób uczących się, a co ciekawe nawet twórczych matematyków. Przykładem przeszkody epistemologicznej, która odegrała istotną rolę w historycznym rozwoju matematyki, jest problem z konkretyzacją liczb ujemnych⁹. Przeszkody natury epistemologicznej spowalniają (lub nawet uniemożliwiają) rozwój wiedzy matematycznej.

Omawiane trudności uczących się i ich przyczyny nie tracą swojej aktualności mimo upływu lat – poglądy Pani Profesor także. Szerokie spektrum jej pracy czeka na opracowanie przez teoretyków i praktyków nauczania matematyki, szczególnie jeśli nie chcemy „zmiękczać” matematyki i wierzyć, że „kształcenie przez matematykę” powinno i przynosi dobre skutki.

Zacytujmy na koniec jeszcze wypowiedź Anny Zofii Krygowskiej ze wspomnianych wcześniej wywiadów prasowych, by podkreślić aktualność jej myśli: „Zbyt mało troszczymy się o kształcenie uczniów przeciętnych, czy nawet słabszych, a więc w istocie o sprawę bardzo ważną – poziom przeciętnej matematycznej kultury społeczeństwa”.

Przypisy

- ¹ A.Z. Krygowska, *Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego”, Seria V, „Dydaktyka Matematyki” 1981, nr 1, s. 7–60.
- ² S. Turnau, *Profesor Zofia Krygowska jako matematyk*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego”, Seria V, „Dydaktyka Matematyki” 2005, nr 28, s. 79–82.
- ³ Te aktywności to wykorzystywanie analogii, schematyzowanie, definiowanie, dedukowanie i redukowanie, kodowanie, algorytmizowanie. Por. A.Z. Krygowska, *Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki*, op. cit.
- ⁴ S. Turnau, *Profesor Zofia Krygowska jako matematyk*, op. cit., s. 82.
- ⁵ Reformami tymi zajmowali się wybitni matematycy i psychologowie, np. G. Choquet, C. Gategno, J. Piaget, G. Papy. Przypomnijmy, że w Polsce reformy lat 60. nie były zbyt radykalne.
- ⁶ J.S. Bruner, *Dojrzałość szkolna*, w: J.S. Bruner (red.), *Proces kształcenia*, Warszawa 1965, s. 37–57.
- ⁷ J. Piaget, *Dokąd zmierza edukacja*, przeł. M. Domańska, Warszawa 1977.
- ⁸ Por. G. Brousseau, *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, „Recherches en Didactique des Mathématiques” 1986, nr 7 (2), s. 33–115; A. Sierpińska, *Pojęcie przeszkody epistemologicznej w nauczaniu matematyki*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego”, Seria V, „Dydaktyka Matematyki” 1988, nr 8, s. 103–153; R. Duda, *Przeszkody epistemologiczne w matematyce*, „Zagadnienia filozoficzne w nauce” 1995, nr XVII, s. 35–48.
- ⁹ A.K. Żeromska, *Miejsce badań historyczno-epistemologicznych w nurcie kształcenia nauczycieli matematyki*, w: A. Kwatera, P. Cieśla (red.), *Rola i zadania dydaktyki przedmiotowych w kształceniu nauczycieli*, Kraków 2010, s. 333–340.

Abstract

Don't Soften Maths!

The aim of this article is to present the main views of Anna Zofia Krygowska, the creator of the mathematics didactics in Polish science, relating to teaching and learning maths as a school subject. According to the author not only did Anna Zofia Krygowska introduced multiple changes into the teaching of mathematics through her innovative views and methods, but also into reformulated the perception of the educational process. In her works we may therefore see the following thesis: mathematics is not only a certain scope of knowledge, but also a way to improve your thinking.

Anna K. Żeromska

Doktor habilitowana w dziedzinie matematyki, profesor Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie, dydaktyk matematyki. Naukowo zajmuje się przede wszystkim antropomatematycznym (humanistycznym i społecznym) ujęciem matematyki szkolnej. Autorka wielu książek oraz artykułów w czasopismach naukowych. Opublikowała między innymi monografię: *Metodologia matematyki jako przedmiot badań antropomatematycznych* (2013).

Dydaktyka matematyki a historia matematyki

Agnieszka Demby

Sposoby wykorzystania związków między tymi dziedzinami

Z terminem „dydaktyka matematyki” spotykamy się w dwóch kontekstach: po pierwsze, jest to nauka zajmująca się procesem uczenia się i nauczania matematyki; po drugie, jest to przedmiot na studiach przygotowujących do zawodu nauczyciela matematyki. W dalszej części tego artykułu prezentuję przykłady badań naukowych z dydaktyki matematyki wiążących się z historią matematyki. Zajmę się jednak głównie

związkami historii matematyki z kształceniem nauczycieli. Postawię pytanie o przydatność znajomości historii matematyki tak w pracy nauczyciela matematyki, jak i dydaktyka matematyki jako nauczyciela akademickiego. Prezentuję przemyślenia wynikające z doświadczeń dydaktyka matematyki w obu wymienionych znaczeniach, jak i wykorzystywania elementów historii matematyki w praktyce edukacyjnej.

Tylko Tales i Pitagoras?

Podczas moich matematycznych studiów uniwersyteckich nie spotkałam się z historią matematyki – nie było ani takiego przedmiotu, ani zwyczaju, by na wykładach z matematyki wzmiankować o kontekście historycznym powstawania pojęć, twierdzeń i ich dowodów. Czasem prezentowane twierdzenia, częściej niż w szkole, opatrzone były nazwiskiem autora (tym przyjętym w podręcznikach akademickich, niekoniecznie właściwym – jak się później przekonałam, studiując burzliwe dzieje rozwoju matematyki). Jeszcze w szkole usłyszałam o dwóch matematykach starożytnej Grecji – Pitagorasie i Talesie, a właściwie poznałam ich twierdzenia. Wraz z upływem czasu przekonałam się też, że niewiele w tym zakresie zmieniło się w świadomości naszego społeczeństwa – przeciętnie wykształcony człowiek niestety nadal tylko tyle wie z historii matematyki.

Ponad dwadzieścia lat temu spotkałam grupę studentów zainteresowanych poszerzeniem bazy przedmiotów, które – jak to ujęli – bezpośrednio wiążą się z pracą nauczyciela matematyki. Wśród propozycji znalazła się historia matematyki. Pomogłam im w realizacji tego pomysłu, zgłaszając przedmiot do puli zajęć fakultatywnych. Obecnie mam już spore doświadczenie nie tylko w prowadzeniu zajęć uniwersyteckich z matematyki i z dydaktyki matematyki dla przyszłych nauczycieli, ale również z historii matematyki. Ponadto wielokrotnie byłam proszona o przygotowanie wykładów lub zajęć z aktywnościami odnoszącymi się do historii matematyki na kursach dla czynnych nauczycieli, dla młodzieży licealnej oraz w trakcie przedsięwzięć popularyzujących matematykę.

Nauczyciele zgłaszający się na zajęcia z historii matematyki chcą poznać to, co nadaje się do bezpośredniego stosowania w szkole – ciekawostki dla urozmaicenia lekcji matematyki i aktywności na dodatkowe zajęcia dla zainteresowanych uczniów, nieco rzadziej – do realizacji projektów między-

przedmiotowych. Zależy im przede wszystkim na wiadomościach (zwłaszcza o charakterze anegdotycznym) o znanych matematykach i ich odkryciach – przedstawionych w sposób zrozumiały i przystępny dla uczniów. Poza tym nauczyciele chcą się dowiedzieć, jak można inaczej (ciekawiej) uczyć matematyki oraz jakie są inne przykłady stosowania wiedzy matematycznej. Poniżej zaprezentuję kilka przykładów takich ciekawostek, faktów i aktywności.

Urozmaicenie lekcji matematyki

Przykład 1. Zaczniemy od wspomnianych już Pitagorasa i Talesa. Ciekawie będzie się dowiedzieć też o innych dokonaniach tych matematyków (choć o ich życiu wiemy tylko to, co podają znacznie późniejsze, niepewne legendy), o osobliwym stylu życia pitagorejczyków, popularności matematyki w starożytnej Grecji, wreszcie o kontekście formułowania i używania znanych twierdzeń (Pitagorasowi zależało na opisanu harmonii świata, stosunki liczb wiązało z współbrzmieniem tonów w muzyce; w przypadku Talesa zwraca się uwagę na przypisywane mu zastosowania praktyczne).

Przykład 2. Obecnie zapisujemy liczby w pozycyjnym systemie dziesiętkowym. Jednak nie zawsze tak było – system ten wchodził do użytku długo i mozolnie. Aż do XV wieku w Europie królował system rzymski. Warto też przyjrzeć się, jak kiedyś zapisywano cyfry hindusko-arabskie, a także zwrócić uwagę na to, że zero zaakceptowano znacznie później niż pozostałe cyfry. Do XVI wieku nie znano zapisu takiego jak $3 + 2 = 5$; nie znano znaków $+$, $-$, $=$, wszystko pisano słowami. Niełatwo też było wykonać obliczenia na dużych liczbach zapisanych w systemie rzymskim. Wyobraźmy sobie na przykład średnio-wiecznego kupca, który musiał pomnożyć CLXXVII przez XXXV! Nielubiane przez uczniów działania pisemne w słupku to racjonalizatorski wynalazek w wielowiekowej historii obliczeń.

Przykład 3. Matematycy dość często uważani są za ludzi oryginalnych, oderwanych od życia, za to aż

do przesady posługujący się logicznym wnioskowaniem. Oto żartobliwa opowieść z życia matematyka, przypisywana Izaakowi Newtonowi, angielskiemu fizykowi i matematykowi.

Razu pewnego zaprosił on na obiad przyjaciela, ale zapomniał o tym uprzedzić służbę. Gdy gość się zjawił, zobaczył na stole jedno nakrycie, a stwierdziwszy, że Newton akurat dokonuje obliczeń, zjadł obiad i wyszedł, nie chcąc przeszkadzać.

– To dziwne – rzekł uczony, skończywszy pracę. Gdyby nie dowody rzeczowe, które stoją na stole, mógłbym sądzić, że nie jadłem dziś obiadu...

Nie jest tu najważniejsze, czy taka sytuacja miała miejsce – po prostu pasuje do tego, jak zapamiętano Newtona z życia codziennego (a jest to okazja do rozbawienia uczniów). Skądinąd wiadomo, że Newton bardzo trzeźwo zajmował się różnymi dziedzinami praktycznymi, pełnił wiele wysoko opłacanych funkcji jako urzędnik królewski. Umiał też skutecznie walczyć z innym wielkim matematykiem i filozofem, Gottfriedem Leibnizem o uznanie swego prymatu stworzenia rachunku różniczkowego. Słynna i dość bulwersująca jest historia tego sporu na łonie prestiżowego angielskiego towarzystwa naukowego *Royal Society* (trudno tu o bezstronność, gdyż Newton był długoletnim prezesem tego towarzystwa).

Zajęcia dodatkowe

Zwyczajowo zajęcia zwane kółkami matematycznymi przeznaczone są dla uczniów o wyraźnych uzdolnieniach matematycznych, „rasowych” matematyków, zajmujących się z pasją rozwiązywaniem problemów matematycznych. Gdy do programu tego typu zajęć włączymy elementy popularyzacji matematyki, ciekawostki o jej zastosowaniach, wreszcie przedstawimy matematykę również w ujęciu humanistycznym, w tym historycznym, ze zdumieniem obserwujemy poszerzenie się grona uczniów zainteresowanych matematyką¹. Okazuje się, że uczniów średnich i nawet słabszych można

również zainteresować tą – z pozoru – dziedziną dla najzdolniejszych.

W ramach zajęć dodatkowych można prezentować matematykę tak, jak to pokazałam w powyższych przykładach (na lekcjach jest czas tylko na drobne wzmianki). Ponadto w większym stopniu można zaangażować samych uczniów do wyszukiwania ciekawostek i informacji, wskazując im odpowiednią literaturę lub strony internetowe. Można również wykorzystać materiał historyczny do ułożenia zadań (innych niż te wynikające z realizacji podstawy programowej) oraz do przygotowania doświadczeń dla uczniów.

Przykład 4. Nawiązując do matematyki starożytnej Grecji (dokładnie – do jej części prezentowanej uczniom, bo matematyka tego okresu miała również inne imponujące, bardzo zaawansowane wyniki), można zająć się na przykład przedstawieniem liczb w postaci regularnych konfiguracji geometrycznych (liczby wielokątne) i – w zależności od dojrzałości uczniów – potraktować je jako układanki lub dowodzić twierdzeń o takich liczbach.

Przykład 5. Już nawet stosunkowo młodych uczniów można zająć zapisami liczb w innych niż nasza cywilizacjach (egipskiej, babilońskiej, chińskiej, Majów) – rozkodowywaniem liczb oraz ich zakodowaniem (systemy obrazkowe i symboliczne, pozycyjne i niepozycyjne, dziesiątkowe i niedziesiątkowe, z sumowaniem wartości znaków i odejmowaniem ich wartości).

Przykład 6. Sięgnięcie do sofizmatów, paradoksów logicznych lub związanych z nieskończonością może stanowić okazję do kształcenia precyzyjnego rozumowania, ale i wprowadzenia elementów humoru i zaskoczenia. Tego typu rozumowania spotykamy już w starożytnej Grecji, borykali się z nimi matematycy średniowieczni, ale i matematycy XIX i XX wieku. Przystępne dla uczniów sofizmaty można znaleźć na przykład w książce Szczepana Jeleńskiego *Lilavati. Rozrywki matematyczne* – w kontekście legendarnego dzieła Euklidesa *Pseudaria*².

Wymiar społeczno-kulturowy

Dla wielu wykształconych ludzi matematyka jest dziedziną bezimienną – bez twórców. Na przykład Archimedes³ i Newton, zapewne najwybitniejsi matematycy w dziejach ludzkości, w ogóle większości ludzi nie kojarzą się z matematyką, lecz z fizyką. Niektórzy ludzie mają świadomość, że nabyte umiejętności matematyczne przydają się w życiu zawodowym. Inni są przekonani, że z matematyką mieli do czynienia tylko w szkole. Jawi im się ona jako dziedzina oderwana od codziennego życia, nie wiążą jej zupełnie z dorobkiem naszej cywilizacji. A przecież rozwój Europy pozostawał w ścisłym związku z rozwojem nauki, również – matematyki. Matematyka to ważny składnik naszej kultury i cywilizacji.

Przykład 7. Matematyka służy na przykład do opisu tego, co piękne i kształtne w świecie, przy czym paradoksalnie przydają się tu również abstrakcyjne liczby niewymierne, na przykład pierwiastek z dwóch występuje we wzorze na przekątną kwadratu, a idealne dla oka proporcje wyrażają się za pomocą tak zwanej złotej liczby (tam występuje $\sqrt{5}$), o której większość ludzi w ogóle nie słyszała, choć wykorzystano ją w wielu budowlach starożytnej Grecji, na przykład Partenonie, ale ujawnia się też ona w świecie przyrody, na przykład w układzie listków na lodydze.

Dzieje liczby π , opisującej kuliste kształty, są dłuższe i bardziej skomplikowane, podobnie liczby e (wszechobecnej w matematyce, ale i w wielu zastosowaniach praktycznych, w tym ekonomicznych).

Przykład 8. Związki historii matematyki z rozwojem techniki, programowaniem komputerowym, modelowaniem zjawisk w biologii, ekonomii itp., rozwiązywaniem problemów ubezpieczeń, szacowaniem wygranej w grach hazardowych, tworzeniem zabezpieczeń na przykład kart kredytowych to bardzo rozległy temat (zainteresowanych odsyłam do serii *Świat jest matematyczny*). Z jednej strony powstawały narzędzia matematyczne bezpośrednio

na potrzeby praktyki, z drugiej zaś czysto abstrakcyjne początkowo pojęcia matematyczne zyskiwały z czasem bardzo użyteczne zastosowania.

W szkole zarysowane powyżej podejście do matematyki i jej historii przydaje się przy realizacji tak zwanych ścieżek oraz projektów międzyprzedmiotowych. Uważam, że uświadomienie wymiaru społeczno-kulturowego matematyki (a poznanie jej aspektów historycznych znakomicie temu sprzyja) „odczarowałoby” trochę złą sławę tej dziedziny, uczyniłoby ją bardziej „ludzką”. Oczywiście, zacząć należałoby od nielekceważenia tego aspektu podczas nauczania matematyki.

Historia matematyki dla zaawansowanych

Pewien zasób wiedzy historycznej przydatnej do zastosowania bezpośrednio w szkole, w formie opisanej powyżej, powinien mieć każdy nauczyciel pracujący w szkole i, co oczywiste, nauczyciel akademicki kształcący przyszłych nauczycieli.

Jednakże istnieje więcej aspektów historii matematyki – bardziej przydatnych dla samego nauczyciela niż dla jego ucznia, pozwalających spojrzeć na nauczanie matematyki z dojrzałego, wyższego poziomu. Nauczyciel ma bowiem więcej doświadczeń związanych z matematyką, zna więcej pojęć matematycznych, bardziej ogólnych i bardziej abstrakcyjnych, więcej technik rozwiązywania matematycznych problemów, z drugiej zaś strony przeszedł szkolny kurs historii ogólnej od czasów najdawniejszych do współczesnych i potrafi spojrzeć na historię matematyki w ujęciu chronologicznym. Jest też zdolny do głębszych analiz i porównań dawnego, historycznego ujęcia pojęć i technik z ich postacią współcześnie używaną.

Tego typu korzyści nauczyciel może uzmysłowić sobie po dłuższym, systematycznym, chronologicznie ustawionym kursie historii matematyki, zwłaszcza gdy prowadzący taki kurs nauczyciel akademicki jest w stanie zaakcentować istotne dla nauczania w szkole problemy i wnioski.

„Kłopotliwi” uczniowie zdolni

Zabawne opowieści o dziwactwach wielkich matematyków i ich niedostosowaniu społecznym trzeba dozować z umiarem i taktem. Współcześnie badacze dostrzegają u wielu genialnych matematyków symptomy zespołu Aspergera. Richard Borchers, laureat Medalu Fieldsa z 1998 roku, ma oficjalnie zdiagnozowany zespół Aspergera. Istnieją analizy, które wskazują na tę dysfunkcję u takich sławnych dwudziestowiecznych matematyków, jak Paul Erdős czy Godfrey H. Hardy, ale i u matematyków z odległej przeszłości: Archimedes, Carl F. Gauss, Joseph L. Lagrange, Augustin L. Cauchy, Bernhard Riemann, Évariste Galois, Nikołaj Łobaczewski i wielu innych. Okazuje się bowiem, że wiele osób z zespołem Aspergera jest uzdolnionych matematycznie, nawet w bardzo wysokim stopniu. Rola nauczyciela matematyki może być nie do przecenienia, jeśli dostrzeże takie zdolności u ucznia i odpowiednio wesprze jego rozwój, a nawet jeśli tylko dowartościuje takich uczniów w opinii innych.

Kolejność i sposób wprowadzania pojęć

Dla nauczyciela matematyki ważna jest świadomość kolejności i sposobu kształtowania się pojęć w historii matematyki i powstawania nowych dziedzin. To daje szerszą perspektywę i w rezultacie większą elastyczność przy planowaniu organizacji nauczania, przy układaniu programów nauczania, korzystaniu z różnych źródeł. Pozwala mu niejednokrotnie inaczej spojrzeć zarówno na kłopoty uczniów, jak i oderwać się od schematu myślowego, że pojęcie A musi koniecznie opierać się na pojęciu B (bo my tak tego się nauczyliśmy lub taki jest zwyczaj w matematyce ostatnich lat). Kolejność logiczna pojęć jest często niezgodna z jej kolejnością historyczną i z kolejnością w rozwoju uczniów (na przykład pojęcia: punktu i prostej są najprostszymi pojęciami dedukcyjnej geometrii, a dla ucznia szkoły podstawowej punkt o szerokości

zero i prosta nieskończenie cienka, o nieskończonej długości bywają czymś niepojętym).

Przykład 9. Standardową kolejnością współczesnego wykładu matematyki jest: pojęcie funkcji, potem pojęcie granicy funkcji, potem pojęcie ciągłości funkcji, pojęcie pochodnej, pojęcie całki. Tymczasem w rozwoju historycznym kolejność była zupełnie inna: metody całkowe pojawiły się już u starożytnych Greków, obliczanie pochodnej w XVII wieku, pojęcie ciągłości funkcji na początku XIX wieku (Bolzano), później pojęcie granicy (Cauchy), a najpóźniej ogólne pojęcie funkcji!

Przykład 10. Przyjrzyjmy się początkom uprawiania matematyki – w starożytnym Egipcie i Babilonie. Z jednej strony mamy do czynienia z wysokim poziomem matematyki, z drugiej zaś z brakiem ogólnych symboli – wszystko odbywało się na konkretnych figurach i liczbach. Ponadto cywilizacje te nie zajmowały się formułowaniem twierdzeń, a tym bardziej ich dowodzeniem. Zbierały doświadczenia drogą empiryczną, stosowały tę wiedzę w praktyce. Być może dlatego również młodym osobnikom naszego gatunku obce są dedukcja i dowodzenie – do tego trzeba dorosnąć intelektualnie. Wcześniej chętnie eksperymentują i w ten sposób zbierają doświadczenia matematyczne.

Przykład 11. Dla wielu uczniów bardzo trudne są początki algebry, zapisywanie zależności z użyciem literowej symboliki algebraicznej i rozwiązywanie równań za pomocą formalnych reguł (na przykład o przenoszeniu wyrazów ze zmienionym znakiem na drugą stronę równania). W historii matematyki umiejętności te kształtowały się przez wieki. Wcześniej królowały rysunki i interpretacja geometryczna, a także intuicyjne próbowanie, czy zaproponowane rozwiązanie jest dobre – czy spełnia równanie. Nie dziwnym się zatem, że umysł ucznia też musi do „prawdziwej” algebry dojrzeć. Za twórcę algebry, w szczególności metod rozwiązywania równań, uważany jest perski matematyk z IX wieku, Al-Chorezmi. I on, i wielu innych matematyków rozwiązywało równania metodami geometrycznymi.

mi – dziś nazwalibyśmy to wizualizacją z użyciem pól prostokątów.

Natomiast za moment ukształtowania się symboliki algebraicznej przyjmuje się zazwyczaj dzieło François Viète'a z końca XVI wieku. Nie znajdziemy tam jednak obecnie używanego sposobu zapisu równań, w szczególności inaczej zapisywano potęgi oraz znak równości.

Przykład 12. Rachunek prawdopodobieństwa kształtował się w kontekście praktycznych obserwacji, na przykład gier losowych. Używany był do rozwiązywania skomplikowanych sytuacji praktycznych od przełomu XVI i XVII wieku, zanim nie pojawiła się w wieku XX aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa. Warto zatem zastanowić się, czy i jakie są powody, by stawiać ucznia od razu przed zaawansowaną postacią tej dziedziny – bez wcześniejszych praktycznych doświadczeń i intuicyjnych rozumowań.

Trudności uczniów a zasada paralelizmu dydaktycznego

Zasygnalizowane przeze mnie powyżej wątpliwości, jak również wnioski do nauczania pozostają w związku z ideą, która od XIX wieku inspirowała wielu teoretyków procesu kształcenia. Roman Duda opisał ją, odnosząc się do prawa biogenetycznego Haeckla: rozwój embrionalny osobnika (*ontogeneza*) stanowi skrócone powtórzenie jego rozwoju rodowego, ewolucyjnego (*filogenezy*). Ponieważ szukanie wzajemnych związków między rozwojem rodowym a rozwojem osobniczym przyniosło zoologii wiele cennych wyników (choć dziś ma to już dla biologów tylko znaczenie historyczne), ideę tę próbowano stosować również przy badaniu pewnych aspektów rozwoju psychicznego, zakładając, że rozwój pojedynczego człowieka powinien przypominać rozwój gatunku.

Tak zwaną *zasadę paralelizmu* w dydaktyce sformułowano następująco: proces uczenia się przez człowieka powinien stanowić skrócone powtórzenie procesu zdobywania wiedzy przez ludzkość. Przeko-

naniu, iż zasada ta powinna odgrywać znaczną rolę w doborze treści i metod nauczania w poszczególnych latach nauki, dawali wyraz wybitni matematycy przełomu XIX i XX wieku, między innymi Felix Christian Klein i Henri Poincaré, a także szwajcarski psycholog Jean Piaget. Okazało się później, że w pewnych sytuacjach zasada paralelizmu dawała cenne wskazówki, a w innych – szkodliwe. Na przykład Piaget wierzył, że skoro ludy pierwotne, nieznające liczb, posługiwały się przyporządkowaniem jeden do jednego, to na tym powinno się kształtować pojęcie liczby u dziecka; proces liczenia przedmiotów był na marginesie jego rozważań. Nie docenił on roli współczesnej kultury, faktu, że dzieci uczą się słów *dwa*, *trzy*, *cztery* wraz z nauką mowy ojczystej.

Historia matematyki dla dydaktyka-badacza

Trudno określić ramy i możliwości wykorzystywania historii matematyki w pracach badawczych z zakresu dydaktyki matematyki. Poniżej podam dwa odmienne przykłady.

Pierwszy z nich, związany z opisaną powyżej zasadą paralelizmu dydaktycznego, znajdujemy u Anny Sfard. W pracy pod tytułem *On The Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin* analizuje ona myślenie matematyczne, podejmując ciekawy i inspirujący temat dualnej natury pojęć matematycznych. Na przykład pojęcie funkcji można widzieć strukturalnie – funkcja jest wtedy obiektem (pewną całością, którą można badać w odniesieniu do innych obiektów, czy też będącą elementem zbioru pewnych funkcji); to już dojrzałe rozumienie funkcji. Jednakże pojęcie funkcji można również postrzegać operacyjnie, czynnościowo – mamy wtedy do czynienia z funkcją jako pewnym procesem obliczeniowym, według dobrze (jednoznacznie) zdefiniowanej metody uzyskiwania wyników na podstawie danych. W podobny sposób można dualnie, jako *proces* lub jako statyczny *obiekt*, widzieć także na przykład pojęcie okręgu (czynność rysowania bądź gotowy obiekt)

czy symetrie. Badania pokazują, że wielu uczniów widzi matematyczne pojęcia jedynie operacyjnie⁴ oraz że czas dojścia do rozumienia strukturalnego pojęcia jest długi. Przypominając historię kształtowania się pojęcia liczby i funkcji w historii matematyki, autorka zwraca uwagę na to, że wielowiekowy proces manipulowania zmiennymi i wykonywania obliczeń przekształcił się w matematyczny obiekt, znany dziś jako funkcja. Problemem edukacyjnym jest spowodowanie, by uczniowie nie pozostali na etapie operacyjnym, aby nie zniechęcili się i nie zagubili, aby stymulować ich rozwój do wyższego poziomu rozumienia pojęcia – również strukturalnego (tak jak to nastąpiło w historii matematyki). W każdym razie wczesne podawanie ogólnej definicji funkcji niczego nie rozwiązuje. Skoro najwybitniejszym matematykom dojście do pojęcia funkcji zajęło 300 lat (od Kartezjusza do Peano), nie może to być łatwe.

Drugi z prezentowanych przeze mnie nurtów badawczych dotyczy włączania elementów historii matematyki (HOM – History of Mathematics) do nauczania w szkole. W wielu pracach wskazuje się i poddaje dyskusji korzyści wynikające ze śledzenia korzeni i rozwoju cywilizacji postrzegania przez uczniów znaczenia matematyki. John Fauvel wymienia następujące korzyści włączenia HOM do edukacji szkolnej:

- okazja do zmiany uczniowskiego postrzegania matematyki, matematyka zyskuje ludzkie oblicze, staje się mniej „straszna”,
- okazja do wzbudzania pozytywnych emocji i pobudzania zainteresowania matematyką,
- nowe inspiracje do prowadzenia badań i doświadczeń,
- zachęta dla uczących się szybciej do dalszych poszukiwań,
- ukazanie rozwoju pojęć w historii i sposobu, w jaki przyczyniają się do wyższego poziomu rozumienia,
- podnoszenie wartości współczesnych technik poprzez porównywanie ich z technikami dawnymi,

- ułatwienie zrozumienia tego, co jest dzisiaj trudne dla uczniów, z wykorzystaniem wiedzy z zakresu historycznych przeszkód i trudności w rozwoju matematyki,
- uświadomienie sobie przez uczniów, że nie tylko oni mają problemy,
- pomoc w pokazaniu roli matematyki w społeczeństwie,
- wzrost motywacji uczniów do uczenia się matematyki,
- pomoc w rozwijaniu podejścia wielokulturowego⁵,
- pomoc w porządkowaniu kolejności pojęć w programie nauczania,
- możliwość pracy międzyprzedmiotowej – z innymi nauczycielami lub przedmiotami.

Fauvel zauważył zarazem, że mimo ponad stu-letniej dyskusji i apeli ekspertów o włączenie HOM do nauczania nadal brak w Wielkiej Brytanii odpowiednich dyrektyw w oficjalnych dokumentach regulujących formalne sprawy nauczania; nie widać również wyraźnych tendencji do włączania HOM do programów nauczania przez samych nauczycieli.

Nawiązując do tych obserwacji, Regina M. Panasuk i Leslie B. Horton postanowiły zbadać poglądy nauczycieli na temat korzyści wynikających z włączania HOM do programów nauczania. Z wielu wcześniejszych badań wynikało bowiem, że to poglądy nauczycieli na matematykę jako dyscyplinę i jej nauczanie są podstawowymi czynnikami, wpływającymi na decyzje o programie i metodach nauczania.

Autorki przeprowadziły wywiady *online* z 367 nauczycielami matematyki szkół średnich z jednego ze stanów USA. 56% ankietowanych zadeklarowało, że włącza HOM do programu nauczania, 36% odpowiedziało, że tego nie robi, pozostali nie udzielili żadnej odpowiedzi. Nauczyciele mieli również zaznaczyć w ankiecie przyczyny swojego stanowiska (lista potencjalnych przyczyn została opracowana na podstawie wcześniejszych doświadczeń autorek oraz innych prac badawczych).

Oto główne powody, dla których nauczyciele włączają HOM do nauczania szkolnego:

- historia matematyki wydaje się interesować uczniów i poprawiać ich nastawienie do przedmiotu; zarówno uczniów, jak i nauczycieli bawiło poznawanie faktów z historii matematyki;
 - nawiązywanie do HOM pomagało uczniom śledzić rozwój związków między pojęciami.
- Główne przyczyny niewykorzystywania HOM:
- nauczyciele twierdzą, że nie wiedzą, jak uczyć historii matematyki, bo brakuje im własnych doświadczeń z tego zakresu;
 - dopóki nie będzie pytań z historii matematyki na egzaminach, HOM nie będzie na liście ich priorytetowych tematów w nauczaniu matematyki, gdyż program jest i tak przeładowany, a uczniowie nie będą uważali dyskusji związanych z HOM za ważne;
 - nie ma wystarczającej ilości odpowiednich materiałów do używania HOM w nauczaniu, nie ma HOM w podręcznikach, z których korzystają nauczyciele.

W dalszej części badań okazało się, że większość nauczycieli z grupy NIE miała znikomy kontakt z historią matematyki w trakcie swego formalnego kształcenia. Przeciwnie było w grupie TAK – znacząca grupa nauczycieli uczestniczyła w zajęciach z historii matematyki. Autorki wysunęły zatem hipotezę, że im więcej przygotowania, tym większa tendencja do włączania HOM do nauczania (pokazały to również wyniki innych badań, na które badaczki się powołały). Zatem korzystne byłoby umieszczenie HOM zarówno w programach kształcenia nauczycieli, jak i w ramach kursów wspomagających rozwój zawodowy nauczycieli. Do większej popularności HOM w nauczaniu mogłoby się przyczynić wydanie stosownych materiałów – obejmujących zarówno treści, jak i wskazówki metodyczne do realizacji tych zagadnień w klasie.

Historia matematyki w realiach polskich

W obowiązkowych treściach/efektach kształcenia edukacji w polskiej szkole (określonych w podsta-

wie programowej kształcenia ogólnego – zarówno w części dotyczącej matematyki, jak i historii) nie ma treści związanych z historią nauki, w szczególności z historią matematyki. Jednakże byłabym bardzo ostrożna w postulowaniu umieszczania HOM w podstawie programowej – z powodu przyczyn, które podali nauczyciele z grupy NIE – to znaczy braku przygotowania nauczycieli, odpowiednich materiałów i czasu na realizację tego dodatkowego materiału. Umieszczenie tematów z zakresu historii matematyki wśród wymagań egzaminacyjnych (skądinąd nie do wynegocjowania, co pokazały doświadczenia brytyjskie, opisane przez Fauvela) pogrzebałoby raczej przyjemność z takiego wzbogacenia nauczania matematyki, z pewnością nie podniosłoby walorów społeczno-kulturowych tych zagadnień w oczach uczniów i nauczycieli.

Natomiast warto włączać elementy HOM do nauczania w szkole, zwłaszcza że wielu nauczycieli patrzy na to przychylnie. Pozostaje pytanie, na jakim poziomie nauczania włączać HOM i w jaki sposób. Ważny jest tu bowiem adekwatny poziom rozwoju ucznia i jego ogólnej świadomości historycznej (matematycy, w tym autorzy podręczników szkolnych, nie zawsze to uwzględniają).

Według moich doświadczeń, w klasach 4–6 szkoły podstawowej nie ma sensu prezentowanie HOM w kontekście chronologicznym, dopiero w klasach 7–8 można zacząć wprowadzać jakiekolwiek daty/epoki i postacie matematyków (bardzo dobrą okazją jest usytuowane w programie nauczania twierdzenie Pitagorasa).

Natomiast w nauczaniu matematyki w szkole ponadpodstawowej systematyczne nawiązywanie do historii matematyki ma już większy sens. Mam tu na myśli zarówno wplecione od czasu do czasu na lekcjach wiadomości i aktywności, zorganizowanie nawet osobnych lekcji na ten temat, a także zajęcia pozalekcyjne: odczyty, pokaz filmu, kółka, projekty, referaty i prezentacje uczniów, nawet inscenizacje historyczne.

Przygotowanie zawodowe nauczycieli

W oficjalnych wytycznych, tak zwanych standardach kształcenia nauczycieli na uczelniach wyższych, nie ma treści dotyczących historii nauki, w szczególności historii matematyki. Na pewno nie byłoby wystarczające jedynie dopisanie takich treści w postaci na przykład trzydziestego punktu do realizacji dydaktyki przedmiotowej, o stopniu ogólności takim jak pozostałe efekty kształcenia w standardach (tj. przypominającym tytuł tego artykułu). Wymagań w stosunku do dydaktyki matematyki i tak jest bardzo dużo, ponieważ w ramach zajęć z tego przedmiotu należy omówić problematykę nauczania matematyki na przestrzeni około 10 lat (uczniów w wieku 10–20 lat), analizę materiału z matematyki, metodykę pracy, organizację nauczania.

Na pewno ważne jest wplatanie informacji natury historycznej w trakcie zajęć z dydaktyki matematyki, przykładowe ciekawostki, wykorzystanie takich materiałów przy praktycznym planowaniu zajęć w szkole itp. Bardzo cenne jest wskazanie studentom materiałów do bezpośredniego zastosowania w klasie – na różnych szczeblach nauczania (notki i ciekawostki w podręcznikach, artykuły, książki popularnonaukowe, filmy, praca nad scenariuszem zajęć dla uczniów o historii matematyki lub zajęć z fragmentem o historii matematyki).

Przedewszystkim jednak potrzebny jest osobny kurs historii matematyki dla nauczycieli (według mego doświadczenia – co najmniej 60-godzinny) z uwzględnieniem chronologii, ale i wniosków do nauczania matematyki⁶. Nawet jeśli student nie jest entuzjastą historii, to powinien się w czasie studiów dowiedzieć, że pojęcia można wprowadzać w różnej kolejności, a także można wybierać różne techniki i interpretacje poszczególnych zagadnień, pracować na różnym poziomie ścisłości. Warto też zwrócić uwagę na trudności w dochodzeniu do współcześnie występujących w nauczaniu pojęć, technik, sposobów argumentowania, jak również na to, że matematyka rozwijała się na bazie problemów abstrakcyjnych (ulepszanie myślenia i precyzji wypowiedzi),

ale i wynikających z potrzeb praktycznych lub innych nauk. Zależy nam w nauczaniu na różnych aspektach nowoczesności i jest to, oczywiście, ważne. Nie zapominajmy jednak o spuściźnie przeszłości i o dawnych pomysłach, jak również o porażkach i błędach.

Chodzi w dużej mierze o większą elastyczność i dalekowzroczność nauczycieli w pracy nad organizacją nauczania – programy nauczania, roczne plany dydaktyczne, wybór podręczników (i innych materiałów dla uczniów), zwłaszcza że niektórzy nauczyciele to przecież również autorzy materiałów dydaktycznych.

Właśnie w kształceniu nauczycieli upatruję najkorzystniejszego miejsca do zmiany oblicza matematyki na bardziej humanistyczne, w szczególności poprzez zaprezentowanie jej w kontekście historycznym. Jest szansa, że przy większej świadomości historycznej nauczycieli matematyki upowszechni się HOM w szkole.

Na systematyczny kurs historii matematyki nie ma w szkole szans – z racji niewystarczających umiejętności matematycznych uczniów, ich niedojrzałości do analiz i porównań na tym gruncie, przede wszystkim zaś braku czasu (postawa nauczycieli, skupiona na wykorzystaniu czasu na staranne kształtowanie pojęć i technik, naukę argumentowania, zastosowania, przygotowanie do egzaminów – wydaje mi się bardzo racjonalna). Nie warto wpisywać HOM do podstawy programowej, zwłaszcza że jest to taki materiał, który nauczyciel powinien wykorzystać tylko wtedy, gdy ma do tego przekonanie – wtedy, być może, zainteresuje uczniów, zarazi entuzjazmem, wzbudzi motywację i pozytywne emocje.

Podsumowując, chciałabym podkreślić, że choć znajomość historii matematyki nie jest dla dydaktyka matematyki niezbędna, traci on dużo na jej nieznajomości – zwłaszcza jako osoba zaangażowana w kształcenie nauczycieli.

Przypisy

¹ Zaobserwowałam to osobiście jako nauczycielka matematyki w szkole. To samo wrażenie odniosło kilku moich znajomych

nauczycieli. Widać, że to bardzo dobra okazja motywacyjna do zajęcia się matematyką – zarówno dla uczniów zajmujących się „wyczynowym” rozwiązywaniem problemów matematycznych, jak i dla tak zwanych humanistów.

- ² Euklidesa znamy przede wszystkim jako twórcę *Elementów*, najbardziej doniosłego dzieła w historii nauki, które wśród wszystkich książek liczbą wydań ustępuje tylko Biblii. Powstało ono ok. 300 lat p.n.e. i zawiera pełny dedukcyjny wykład geometrii prostych, płaszczyzn, kół i kul oraz arytmetyki liczb naturalnych. O precyzji i jasności tego wykładu świadczy fakt, że pierwszą prawdziwą usterkę znaleziono w nim dopiero pod koniec XIX wieku (używane było również jako podręcznik szkolny).
- ³ Jak zaobserwowałam, również przeciętny student – przyszły nauczyciel matematyki – nie ma świadomości tego, że Archimedes był jednym z największych matematyków w historii tej dziedziny. Jego właśnie wizerunek umieszczony został na Medalu Fieldsa – najwyższym odznaczeniu, jakim może zostać uhonorowany matematyk (nagrody Nobla w tej dziedzinie nie ma).
- ⁴ Niejeden student na pytanie, co to jest pochodna funkcji, odpowiada: „nie wiem/nie pamiętam, ale wiem, jak ją obliczyć”. Podobnie jest w przypadku pojęcia symetrii osiowej – uczniowie nie wiedzą, co to jest, ale potrafią odbić punkty symetrycznie względem prostej.
- ⁵ Osiągnięcia matematyki pochodzą z różnych stron świata: niejednokrotnie równocześnie odkrywano coś w odległych geograficznie cywilizacjach. Pewne pomysły i odkrycia trafiały na grunt europejski w wyniku wojen i podbojów, czasem były „przywożone” z dalekich podróży. Bardzo długo centrum matematycznej cywilizacji mieściło się wokół Morza Śródziemnego, nie tylko po jego obecnej europejskiej stronie.
- ⁶ Przy planowaniu takiego kursu polecam przystępnie napisane pozycje, które w bibliografii znajdują się w części Kompendium wiedzy z historii matematyki. Jest to też dobry zakres materiału dla nauczyciela, który chciałby samodzielnie poznać dzieje matematyki.

Bibliografia

Kompendium wiedzy z historii matematyki

Duda R., *Matematyka a dzieje myśli*, open.uj.edu.pl, data dostępu: 10.02.2020.

Kordos M.: *Wykłady z historii matematyki*, Warszawa 2005.

MacTutor *History of Mathematics*, mathshistory.st-andrews.ac.uk, data dostępu: 10.02.2020.

Stewart I.: *Oswajanie nieskończoności. Historia matematyki*, Warszawa 2009.

Prace o charakterze naukowym

Duda R.: *Zasada paralelizmu w dydaktyce*, w: *Dydaktyka Matematyki*, t.1, Warszawa 1982.

Fauvel J.: *Using History in Mathematics Education*, „For the Learning of Mathematics” 1991, nr 11.

Fitzgerald M.: *Asperger’s Disorder And Mathematicians of Genius*, „Journal of Autism and Developmental Disorders”, marzec 2002.

Panasuk R.M., Horton L.B.: *Integrating History of Mathematics into the Classroom: Was Aristotle Wrong?*, „Journal of Curriculum and Teaching” 2013, nr 2.

Sfard A.: *On The Dual Nature Of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin*, „Educational Studies in Mathematics” 1991, nr 2.

Źródła popularnonaukowe

Anegdota o matematykach, matematyka.wroc.pl, data dostępu: 10.02.2020.

Bieńko W.: *Zygakiem przez matematykę*, Warszawa 1965.

Jeleński S.: *Śladami Pitagorasa*, Warszawa 1988.

Jeleński S.: *Lilavati. Rozrywki matematyczne*, Warszawa 1992.

Pragacz P.: *Humor w matematyce*, „Konspekt” 2007, nr 1 (28), matematyka.poznan.pl, data dostępu: 10.02.2020.

Świat jest matematyczny, t.1–40, RBA Collectionables, S.A., Barcelona – Hiszpania 2010–2012, adaptacja wydawnicza: BUKA Books, Sławomir Chojnacki.

Abstract

Didactics of Mathematics and the History of Mathematics

The term “didactics of mathematics” has two meanings: firstly, it is a research domain concerning the process of learning and teaching mathematics; secondly, it is a subject matter of a university course offered to students as part of the professional training for mathematics teachers. Examples of research dealing with relations between education and the history of mathematics are discussed, also in the context of teacher training. The author’s reflections are based on her professional experience in mathematics education (in both meanings of the term) and also on the experience with mathematics history for prospective teachers and with using elements of it in the educational practice.

Agnieszka Demby

Doktor nauk matematycznych. Specjalizuje się w dydaktyce matematyki. Pracuje w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego.

Protezy wyobraźni

Michał Szurek

Komputer – pomoc czy przeszkoda w nauczaniu matematyki?

Niniejszy artykuł nie zawiera wypracowanej, przemysłanej i jedynie słusznej teorii dydaktycznej dotyczącej posługiwania się w nauczaniu szkolnym urządzeniami, które w latach 40. XX wieku nazywano mózgami elektronowymi, potem maszynami matematycznymi, a obecnie – wprost z łaciny – komputerami. Takiej teorii po prostu nie ma i być nie może, przynajmniej obecnie, to jest w czasach, kiedy jesteśmy świadkami tak szybko zachodzących zmian. Już za chwilę szkoły zapełnią się uczniami, którzy dożyją XXII wieku. A jeszcze niedawno przez „wiek poprzedni” rozumieliśmy automatycznie dziewiętnaste stulecie, na początku

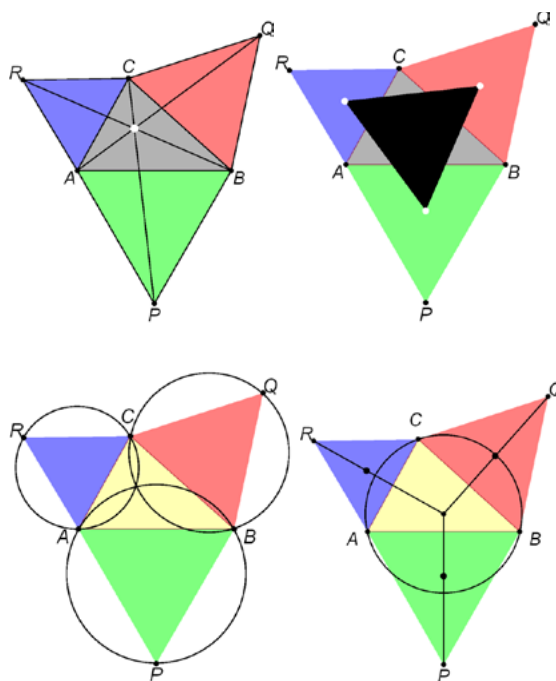
którego największa prędkość poruszania się człowieka zależała od ręczności konia. Dlatego też nieprędko skończy się „dłubanie przy oświacie”. Ale z tego samego powodu nie możemy udawać, że komputerów nie ma i nauczać jak za króla Ćwiczka, i w dodatku – według modelu prusko-rosyjskiego, który, ze wszystkimi wadami i zaletami, wciąż panuje w Europie. Truizmem jest, że przygotowujemy naszych uczniów do pracy w zawodach, których jeszcze nie ma, a w każdym razie – powinniśmy ich przygotować. Po omacku, na wyczucie, przeskakując kłody rzucane nam pod nogi przez instytucje, które powinny raczej je usuwać.

Mój pierwszy raz

Artykuł zawiera kilka refleksji (i ostrożnych uogólnień), związanych z wykorzystaniem komputera na lekcjach szkolnych i ćwiczeniach akademickich. Tematem interesowałem się od samego początku upowszechnienia się komputerów osobistych i aktywnie próbowałem jak najlepiej wykorzystać technikę, która zrewolucjonizowała świat. Nie od rzeczy będzie, gdy określe swój wiek. Suma cyfr mojego roku urodzenia, a także roku urodzenia mojej córki, jest podzielna przez 20. W roku 2000 miałem dwa razy tyle lat, ile moja córka. Ostatnią cyfrą liczby powstałą przez podniesienie roku urodzenia mojej córki do potęgi o wykładniku będącym moim rokiem urodzenia – jest 9.

Mój pierwszy kontakt z komputerem w nauczaniu matematyki miał miejsce w pierwszych latach upowszechnienia się komputerów osobistych. Kolega zapytał mnie, czy umiem rozwiązać pewne zadanie i zanim odpowiedziałem, zaprowadził mnie do biurka, na którym stał okazały, nowoczesny wtedy komputer XT. Pokazał program, napisany w DERIVE – jednym z pierwszych programów do rachunków symbolicznych. „O, wprowadzam współrzędne punktów A, B, C. Dostawiam trójkąty ABP, BCQ, ACR. Wyznaczam równania prostych RB, AQ, PC. Mam trzy równania liniowe, rozwiązuję – i zobacz, że się przecinają w jednym punkcie”.

Nie zapomnę, jak zachwyciłem się nowymi możliwościami. Udowodniłem bez większego trudu inne ciekawe własności tej konfiguracji (są napisane w twierdzeniu poniżej). Pamiętam, że spędziłem przedłużony weekend najpierw na nauce zupełnie obcej wtedy techniki, a potem na zastosowaniu jej do zadań. Nie mogę sobie odmówić niewątpliwiej przyjemności przypomnienia sobie (i pokazania Czytelnikom), jak to było.



Rys. 1. Na bokach trójkąta zbudowano trójkąty równoboczne. Co ciekawego otrzymaliśmy?

Zadanie 1.

Na bokach trójkąta ABC zbudowano (na zewnątrz) trójkąty równoboczne. Wykaż, że:

- odcinki łączące wierzchołki trójkątów równobocznych z przeciwległymi wierzchołkami trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie;
- środki trójkątów równobocznych także tworzą trójkąt równoboczny;
- okręgi opisane na trójkątach równobocznych mają punkt wspólny;
- proste łączące wierzchołki trójkątów równobocznych z ich środkami przecinają się w środku okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zrobiłem stosowne rysunki, popatrzyłem i zachowałem się jak matematyk. A co z innymi wielokątami? Dobudujmy na bokach prostokąta kwadraty, połączmy środki... Upprzedzę: nic cie-



Rys. 2. Równoległobok dał prostokąt, deltoid dał trapez, a trapez – deltoid.

kawego nie wyjdzie. Interesująco się robi, gdy zaczniemy od pewnych specjalnych czworokątów. Widzimy to na kolejnych rysunkach. Równoległobok da kwadrat, deltoid – trapez, a trapez równoramienny – deltoid.

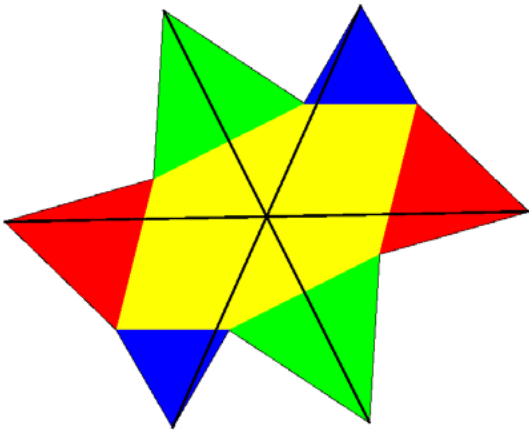
Napisanie dowodów „komputerowych” zajmie kilkanaście minut. Oczywiście ważniejsze są ładne dowody geometryczne. Można je nietrudno znaleźć, rachując na kątach. Zwróćmy jednak uwagę, jak komputer nam pomógł. Naprowadził, podpowiedział, niemalże doradził. Na przykład żeby rozwiązać pierwszą część zadania, wystarczy udowodnić czwartą – a to jest nietrudne.

Proszę zwrócić uwagę na podpis pod rys. 1: „Co ciekawego otrzymaliśmy?”. Wbrew utartej terminologii, dopiero takie zadanie nazywam „otwartym”. Nie precyzuję „produktu końcowego”, nie podpowiadam, jakie twierdzenia mam udowodnić. To ty, uczniu, masz je znaleźć. Odkryć coś nowego (przynajmniej dla siebie). Od lat namawiam kolegów organizujących konkursy do takich właśnie zadań otwartych. Bardziej są one zbliżone do prawdziwych sytuacji dorosłego życia. Nie znamy dokładnie treści zadań, które ono dyktuje.

Myślałem, że tak będzie wyglądała lekcja przyszłości. Nauczyciel tradycyjnie poda zadanie, uczniowie rozwiążą, ale potem zaczną się dyskusja nad wariantami, uzupełnieniami, uogólnieniem i tak dalej. Komputer sprawi, że da się to zmieścić

w czasie jednej lekcji. Osiągniemy więcej, nauczymy uczniów stawiania przed sobą zadań, nauczymy pracy nierutynowej, a lekcje będą przyjemne.

Oczekiwałem znacznie więcej. Wyobraziłem sobie, że informatyka przejmie od matematyki pałeczkę pierwszeństwa w nauczaniu myślenia i rozumowania. Nie wszyscy Czytelnicy wiedzą, że mniej więcej do połowy XX wieku języków obcych uczono nie dla praktyki w porozumiewaniu się, a dla ćwiczeń logicznych. Dlatego taki nacisk kładziono na łacinę i grekę, na „rozbiór zdania”, z całą skomplikowaną gramatyką języków starożytnych Rzymian i Greków oraz deklinacją i koniugacją. Myślałem, że pisanie programów nauczy logiki, myślenia, dedukcji itp. nie gorzej niż klasyczna geometria. Dalej twierdzę, że tak jest, ale – jak wiadomo – nauka informatyki polega obecnie na biernym przyswajaniu gotowych „aplikacji”. Nie oceniam tej sytuacji, nie mówię, że to jest złe. Po prostu stwierdzam fakt – tak jest i już. Ale uważam, że pokolenie ludzi urodzonych przed, powiedzmy, 1975 rokiem jest w tej korzystnej sytuacji, że potrafi zrobić wiele rzeczy i bez komputera, i z nim. Ja często piszę ręcznie, a bywa, że obliczenia, które wykonał komputer, sprawdzam „na papierze”. Nie dlatego, że podejrzewam, że system się pomylił, tylko że ja nacisnąłem niewłaściwy klawisz. Młodsze pokolenie jest bezbronne – prosta trygonometria jest dla nich za trudna.



Rys. 3. Ilustracja do zadania 2.

Zadanie 2.

Sformułuj twierdzenie, do którego ilustracją mógłby być ten rysunek. Narysuj go na przykład za pomocą GeoGebry, ale tak, żeby łatwo było zmieniać kształt sześciokąta oraz sześciokąt na przykład na ośmiokąt. Co interesującego dostrzeżesz?

To był błąd, błąd młodości!

Jakże się myliłem! Uczyłem wtedy w warszawskim X LO im. Klementyny Hoffmanowej. Były tam klasy uniwersyteckie, z rozszerzonym programem matematyki. Postanowiłem nauczać nowocześnie, z komputerem. Poniosłem porażkę. Dyrekcja szkoły miała pretensje, że rozwalam porządek. Nauczycielka informatyki czuła się obrażona, że wchodzę na jej poletko, a uczniowie żalili się, że mają dodatkową pracę. W następnych latach już nie kontynuowałem tego pomysłu. Natomiast na własne potrzeby napisałem pakiet, który teoretycznie rozwiąże każde zadanie z planimetrii.

Po prostu zaprogramowałem cztery podstawowe konstrukcje: prowadzenie prostej przez dwa punkty, wyznaczanie punktu wspólnego dwóch prostych, prostej i okręgu oraz dwóch

okręgów. Dało to dość dobre rezultaty – rozwiązuję tak nawet większość zadań olimpijskich z planimetrii. Ale sam uważam, że jest to „mordowanie geometrii” i nie wychylałem się z tym na zewnątrz.

Wypowiem tu bardzo niepopularny pogląd. Kryzys w nauczaniu geometrii szkolnej zapoczątkowała, będąca niezaprzeczalnym autorytetem, Pani Profesor Anna Zofia Krygowska (1904–1988), która zrobiła z intuicyjnej i radosnej geometrii sztywną teorię aksjomatyczną. Jej (teorii!) niewątpliwym urok był nie do pojęcia przez 90 procent uczniów (i chyba tyleż nauczycieli). Takie podejście docenia się dopiero w dorosłym życiu naukowym, chyba że jest się szczególnie uzdolnionym do matematyki i zamiłowanym w niej. Takim to uczniom podręczniki Profesora Krygowskiej bardzo się podobały. „Takim”, to znaczy co najwyżej jednemu na dziesięć.

Trzeba inaczej. To znaczy jak? Megakłapa!

Wracam do komputera. Kilka razy przydał się mi do efektywnych zadań. Oto jedno z nich, też olimpijskie.

Zadanie 3.

Graniastosłup sześciokątny prawidłowy przecięto płaszczyzną nieprzechodzącą przez podstawy graniastosłupa. Oznaczmy kolejno przez $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ odległości punktów przecięcia płaszczyzny z krawędziami od płaszczyzny podstawy (prościej: są to wysokości tych punktów nad podstawą). Wykaż, że suma kwadratów liczb d_1, d_3, d_5 jest równa sumie kwadratów d_2, d_4, d_6 .

Bez trudu napisałem program, który to wyliczył. Dla dzisiejszych uczniów: obliczcie to w GeoGebrze! Bardzo proste! Ale potem zamiast kwadratów wziąłem trzecie potęgi. Wyszło to samo: że sumy sześciątów odległości też są równe. Zajęło mi to 10 sekund (zmiana 2 na 3). Zaciekawiony, wziąłem czwarte potęgi. Już nie. No, to w minutę

przeprogramowałem sześciokąt na ośmiokąt. Równość zgadzała się dla wykładników 2, 3 i 4. Wyżej nie. Odkryłem, że dla graniastoslupa $2n$ -kątnego odpowiednia równość zachodzi dla potęg aż do n -tej. To o tyle ciekawe, że potęgi wyższe niż druga rzadko pojawiają się w geometrii. Dowód „matematyczny” był dość skomplikowany, ale nie odkryłbym twierdzenia bez zabawy z napisanym programem. Podobnych zadań mam kilkanaście.

Minęło kilkanaście lat. Uczyłem matematyki na wydziale geografii pewnego uniwersytetu. Najważniejsza była tam statystyka. Nie mogłem wymagać od studentów, by przynosili ze sobą komputery, ale kalkulatory z odpowiednimi funkcjami można było kupić za 10 zł. Studenci chętnie uczyli się posługiwać takimi kalkulatorami – niestety w konsekwencji wpadali w pułapkę. Nie przychodziło im do głowy, że coś źle wcisnęli, albo zastosowali złą funkcję, tylko bez refleksji przyjmowali to, co zobaczyli w okienku. „Szczytem” była sytuacja, kiedy studentce wyszło z obliczeń, że biegun północny jest 114 km od Warszawy (we wzorze pomyliła znaki). Na moje nieco (może za bardzo) uszczypliwe uwagi, czy naprawdę uważa, że biegun jest koło Mławy, odpowiedziała, że oczywiście nie, ale komputer tak obliczył, a więc zadanie jest dobrze rozwiązane! A że nie przystaje do rzeczywistości? Odpowiedziała rezolutnie, że zadania matematyczne często są takie i domagała się oceny pozytywnej. Pokazałem jej, gdzie zrobiła błąd. Nie przekonało to jej: „Ojej, to jeden drobny błąd, raz pomyliłam plus z minusem i za to od razu zero punktów??”. Większość studentów podchodziła do obliczeń równie bezkrytycznie. Ciekawe, że podawali w odpowiedzi tyle cyfr, ile mieściło się okienkach, na przykład że odchylenie standardowe wynosi 6,31283193.

Największą „klapę” zaliczyłem w pewnej Wyższej Szkole Informatyki. Uczyłem algebry (na pierwszym roku studiów inżynierskich). Pomyślałem sobie, że jestem we właściwym miejscu, że XXI wiek itp. Wszystkie obliczenia robiliśmy komputerowo. Skutek był opłakany. Studenci my-

śleli na przykład, że wyznacznik to jest coś, co wyskoczy na ekranie po naciśnięciu „takich a takich klawiszy”. Nie byli w stanie wykonać samodzielnie najprostszych obliczeń. Nie rozumieli nic. Teraz uczę ich „jak za króla Cwieczka” – wszystko ręcznie. No, prawie, kalkulatory są dozwolone. Tłumaczę im: „Nawet, jeżeli są koparki, trzeba umieć dołek wykopać łopatą”.

A jednak dopuszczam TI. Na przykład nie uczę już algorytmów na wyznaczanie macierzy odwrotnej i kilku innych technik. Argumentuję to w ten sposób: „W praktyce zawodowej i tak weźmiecie odpowiedni program”. Pamiętam zdziwienie swojego ojca, kiedy dowiedział się, że w szkole nie uczy się już (a było to ponad pięćdziesiąt lat temu) pisemnego sposobu wyciągania pierwiastka. Argumenty ojca były podobne do dzisiejszych: „A gdy nie będziesz miał tablic, ani kalkulatora, co wtedy zrobisz? Na przykład na pustyni!”. Odpowiedź jest oczywista: wtedy prawdopodobnie nie będzie mnie w ogóle obchodzić, ile ten pierwiastek wynosi.

Wracając do codziennego nauczania informatyki – zmuszam natomiast studentów do ręcznego obliczania wyznaczników. Uważam, że to uczy (równie dobrze jak sudoku) pewnej spostrzegawczości liczbowej, potrzebnej każdemu. Każę rozwiązywać proste równania kwadratowe z wzorów Viete’a, wyśmiewam się (łagodnie i dobrotliwie) z ich trudności z tabliczką mnożenia oraz (mniej dobrotliwie) z wzorami skróconego mnożenia. Staram się, żeby komputer był pomocą, a nie zawadą. Zdziwiło mnie, że studenci pierwszego roku niechętnie używają komputera do obliczeń. Wolą szkolny sposób, na papierku! Tak mocne są nawyki szkolne. Mowa oczywiście tylko o studentach z mojej szkoły. Ogólnych badań nie prowadzę. Jeszcze raz powtórzę: komputer ma być pomocą, a nie zawadą.

Signum temporis

W 1994 roku na obóz naukowy Krajowego Funduszu na rzecz Dzieci przyjechało kilku uczniów z Anglii.

Nie rozstawali się z kalkulatorami, wszystko potrafili wyliczyć, ale przekątna kwadratu o boku 1 miała dla nich długość 1,4142. Oznaczenie nic im nie mówiło. Jedna trzecia to było 0,333333 i tak dalej. Do każdego zadania wyciągali kalkulator... I najczęściej nie wiedzieli, co podstawić, w szczególności w zadaniach geometrycznych. Skojarzyło mi się to z propozycjami prof. XY, uznanego autorytetu w dziedzinie informatyki i jej nauczania, że musimy iść drogą brytyjską. W Anglii, mówił XY na konferencji Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej (2018), każdy uczeń ma aparacik-przystawkę, gdzie ma „wszystko”: całą wiedzę szkolną i pozaszkolną. Wołał: uczmy dzieci, jak korzystać z tych przystawek, i był głuchy na argumenty, że najpierw trzeba zapewnić każdemu uczniowi taki gadżet, a przedtem przeszkolić nauczycieli – nie tylko, by umieli się tym posługiwać, ale by przyswoili sobie nowy styl działania.

Inny kolega, bardzo dobry matematyk, „kazał” mi pójść do szkoły, w której od jego córki (bodajże trzecioklasistki) „Pani” wymagała znajomości na pamięć tabliczki mnożenia. Na konferencji Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki w 2019 roku pewien profesor hiszpański pokazywał program komputerowy do kolorowania ścian wielościanów. Wyglądało to wręcz makabrycznie – odcięte dłonie malowały „pobielone ściany”. Głępszym pomysłem jest chyba tylko „elektroniczny przyrząd do gaszenia świec”.

Nie od razu da się pojąć, że obfitość programów komputerowych, umożliwiających obejrzenie konfiguracji przestrzennych w całym ich bogactwie – zabija, a nie rozwija wyobraźnię przestrzenną. Ręczę z doświadczenia, że tak jest. W pewnej warszawskiej szkole, na Ursynowie, zorganizowano „dzień oka” – wszystko o oku, z punktu widzenia optyki, fizjologii, fizyki, chemii, a także (!) literatury. Niesamowite wrażenie wywołał pokaz łyżeczki zanurzonej w szklance z herbatą. Wszyscy widzieli na własne „oczy”, że była złamana. Takiego efektu nie da żaden pokaz komputerowy!

Natomiast nie jest wcale słuszne twierdzenie, że gorsza wyobraźnia przestrzenna to od razu coś złego. Podam przykład. Mój ojciec (urodzony jeszcze jako poddany Najjaśniejszego Pana Franciszka Józefa I) mógł ścigać się z kalkulatorem w dodawaniu długich kolumn cyfr – był po prostu kształcony w sposobach błyskawicznego dostrzegania upraszczających grupowań. Ja prześcigam swoich studentów w wyobraźni liczbowej, w rozumieniu, o co chodzi w długiej kolumnie liczb, ale i – zdecydowanie – w wyobraźni przestrzennej. I to mnie, owszem, trochę martwi, ale nie do końca. Niesamowita sprawność rachunkowa mojego ojca nie jest już dzisiaj przydatna. Może tylko w teleturnieju „Mam talent”. Zanika zawód mojego dziadka, który był szewcem. Dawno zniknął płatnerz (a kto to był?). C'est la vie. Komputer jest dobrą protezą naszej wyobraźni.

Czy naprawdę świat się zmienił od czasu pierwszych PC-tów?

Ryszard Kapuściński (1932–2007) pisał, że przybywa nam wiedzy. Nam, to znaczy ludzkości. Wiemy coraz więcej, ale wydaje się, że ta wiedza jest skumulowana tylko w pamięci komputerów, a nie w umysłach ludzi. Pisał także: „Nie rozumiesz? To nie szkodzi, uszanuj to. Uszanuj obecność tajemnicy”. Tymczasem dzisiaj chcemy wszystko zrozumieć, pojąć, do dna. Może to i dobrze... Może jednak niekoniecznie.

Na pewne warsztaty Krajowego Funduszu na rzecz Dzieci zaprosiłem również rodziców. Przyszli dość licznie. Pod wpływem pewnego impulsu dałem uczniom zadanie. „Uwaga. Wyjmujemy kartki, ołówki i smartfony. Wszystko inne chowamy. Dyktuję zadanie. 28 lutego 2020 roku o godzinie 11.50 PM wystartował z LAX bezpośredni samolot do SYD. Prędkość podróży samolotu to 500 mil na godzinę. Którego dnia i o której godzinie samolot przybędzie na docelowe lotnisko? Wszystkie potrzebne dane znajdź w Internecie”.

Najbardziej zaskoczeni byli rodzice. To tak można? Jeszcze pamiętamy, jak sami rozwiązywaliśmy mozolnie zadanie o pociągach „z miasteczka A do miasta B”.

Nie minęło 15 minut, a zadanie o samolotach było rozwiązywane (również ku zdziwieniu rodziców). Nie do końca – niektórym uczniom trzeba było wyjaśniać, dlaczego na Ziemi musi istnieć „linia zmiany daty”. „Było coś takiego na geografii, ale nikt tego nie rozumiał”. Dopiero na lekcji matematyki okazało się, że jest to dość proste. I chciałbym, żeby tak było: na innych lekcjach trudne, ale kiedy matematyk wytłumaczy, to łatwe! Nie na darmo Hugo Steinhaus (matematyk lwowski, potem wrocławski, 1887–1972) mawiał: „Matematyk zrobi to lepiej”.

Koda

Na konferencji w Berlinie (jeszcze wtedy był stolicą NRD) pewien Holender rozpoczął swój wykład od zdania (na szczęście napisał na tablicy – wtedy jeszcze się pisało, i to zwykłą kredą!): „De computer is niet de steen, maar de slijpsteen der wijzen”. Język holenderski jest podobny do niemieckiego, może trochę mniej niż czeski do polskiego, ale przeważający na sali Niemcy zrozumieli, o co chodzi. Pytałem potem wielu kolegów Niemców, a nawet samego wykładowcę, co to znaczy, ale nikt jakoś nie umiał mi wytłumaczyć. Dopiero sam na to wpadłem. *Slijpsteen* znaczy po holendersku to samo, co *Scharfstein* po niemiecku, czyli mniej więcej „osełka”. Rzadkie dziś słowo. Nic dziwnego, że nikt nie umiał przełożyć. Mam nadzieję, że wszyscy Czytelnicy w ogóle wiedzą, czym jest osełka. Użycie jej zanikło wraz z odejściem do lamusa kosi jako narzędzia do żęcia. A zatem: „Komputer nie jest kamieniem filozoficznym, tylko osełka!”.

Mam nadzieję, że gawędziarski styl artykułu nie wywołał w Czytelniku wrażenia, że traktuję sprawę lekko i niepoważnie. Nie wszystko, co na-

pisane napuszonym, a co gorsza quasi-naukowym (a nawet i naukowym!) stylem (dość lubianym przez zawodowych dydaktyków), jest godne uwagi.

Abstract

Prostheses for Imagination

In this article, the author examines the idea that modern didactics of mathematics has been changing due to an increasing influence of IT tools both in scientific research and school education. Furthermore, the presence of computers has not only changed the approach to research, but also some of the principles and values of everyday social life. At the same time, the author questions – taking into account the technological process – the value and legitimacy of using “traditional” teaching methods, especially in sciences, which provide students not only with suitable skills and knowledge but also with not less important (and definitely underrated) thinking efficiency. Does the school keep up with those changes? And to what extent does its development go hand in hand with the progress of today’s world, dominated with modern technologies?

Michał Szurek

Doktor habilitowany w dziedzinie matematyki, popularyzator nauki, publicysta, profesor. W 1968 roku ukończył studia na Uniwersytecie Warszawskim. Emerytowany pracownik naukowy i wykładowca tej uczelni. Jego główna specjalność badawcza to geometria algebraiczna. Laureat nagrody imienia Samuela Dicksteina Polskiego Towarzystwa Matematycznego za działalność na rzecz matematyki (2004). Opublikował między innymi: *Opowieści matematyczne* (1987), *Opowieści geometryczne* (1995), *Z komputerem przez matematykę* (1995), *Matematyka dla humanistów* (2000), *Matematyka przy kominku* (2008), *Gawędy matematyczne na każdy dzień miesiąca* (2012), a także ośmiotomowy cykl wykładów: *O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów* (2006).

Parzystość w matematyce szkolnej

Jerzy Kołodziejczyk

Zagadnienia teoretyczne oraz przykłady zadań

Parzystość liczb pojawia się dość wcześnie w procesie edukacji matematycznej. Kiedy dziecko opanuje podstawy sztuki liczenia, proponuje mu się liczenie „co dwa”: 2, 4, 6, 8... Później zapoznajemy je z pojęciem podzielności, w tym podzielności przez 2, oraz z formalnym określeniem liczb parzystych i liczb nieparzystych. W mowie potocznej parzystość występuje bardzo często i w różnych sytuacjach. Mówimy o parze oczu, parze rękawiczek czy butów, o tworzeniu par poprzez chwytywanie się za ręce, o parze liczb stanowiącej współrzędne punktu na płaszczyźnie, o parze punk-

tów będących końcami odcinka czy parze półprostych jako ramionach kąta. Każda kartka książki ma dwie strony, z których jedna ma numer nieparzysty, druga parzysty. Ściany prostopadłościanu można badać parami, gdyż przeciwległe ściany są identyczne. Jedną z podstawowych własności wszystkich grafów jest to, że liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta. W matematyce pojęcie parzystości liczb przeniesiono na inne obiekty, na przykład funkcje parzyste (nieparzyste). W teorii liczb są twierdzenia i hipotezy pokazujące związki pomiędzy liczbami parzystymi a pierwszymi.

Do czego potrzebujemy parzystości?

Znana hipoteza Goldbacha mówi, że dowolna liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych. Hipoteza ta jest przykładem prostego w sformułowaniu, ale niezwykle trudnego do udowodnienia lub obalenia, przypuszczenia charakteryzującego liczby parzyste.

Również twierdzenie Pitagorasa ma związek z parzystością. Wszystkie trójkąty prostokątne o bokach całkowitej długości i takie, że długości przyprostokątnych są względnie pierwsze (nie mają innych niż 1 wspólnych dzielników), mają przyprostokątne o różnej parzystości – długość jednej jest liczbą parzystą, drugiej nieparzystą. Podobnych przykładów można oczywiście przytoczyć więcej.

Jednak o szczególnej roli parzystości w procesie edukacji matematycznej, a pośrednio dla szeroko rozumianej kultury matematycznej, decyduje mnogość zastosowań w modelowych przykładach prezentujących różne techniki i metody rozumowania oraz dowodzenia twierdzeń. I tak parzystość jest wykorzystywana w dowodach nie wprost – w zadaniach, w których zliczane są obiekty dwoma sposobami, w których są wykorzystywane pewne niezmiennicze własności badanych procesów, w których używa się przykładów i kontrprzykładów czy rozkładu na czynniki pierwsze, grupowania w pary, zasadę szufladkową Dirichleta, własności figur i przekształceń, algorytmów itp. Liczne zadania na konkursach i olimpiadach matematycznych potwierdzają, że tematyka parzystości liczb jest bardzo użyteczna i warta głębszego poznania.

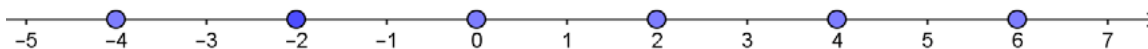
Poniżej zaprezentujemy serię wybranych problemów i zadań związanych z parzystością.

Wprowadzenie do pojęcia parzystości

Liczby: 0, 1, 2, 3, 4... będziemy nazywali naturalnymi, a liczby: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3... – całkowitymi. Liczbę całkowitą podzielną przez 2 nazywamy parzystą, a każdą inną liczbę całkowitą – nieparzystą. Na przykład liczbami parzystymi są 14, 800, -32, 0, itd., a nieparzystymi 1, 3, 5, -1, -3 itd. Podział liczb całkowitych na parzyste i nieparzyste jest kompletny, tj. każda liczba całkowita jest albo parzysta albo nieparzysta oraz nie ma liczb parzystych, które byłyby również nieparzystymi. Przytoczona definicja liczby parzystej w języku operacji arytmetycznych może być sformułowana następująco: liczba całkowita n nazywa się parzystą, gdy istnieje taka liczba całkowita k , że $n = 2 \cdot k$. Tak określona liczba k jest wynikiem dzielenia n przez 2. Liczba o 1 większa, jak i liczba o 1 mniejsza od parzystej jest nieparzysta. Tak więc każdą liczbę parzystą można przedstawić w postaci iloczynu 2 przez liczbę całkowitą k , czyli w postaci $2k$, a każdą liczbę nieparzystą w postaci $2k + 1$ lub $2k - 1$, np. $46 = 2 \cdot 23$, $17 = 2 \cdot 8 + 1$ lub $17 = 2 \cdot 9 - 1$.

Wymieńmy kilka podstawowych własności związanych z pojęciem parzystości:

- Na osi liczbowej co druga liczba całkowita jest parzysta i co druga nieparzysta. Wśród dowolnych dwóch kolejnych liczb całkowitych jedna jest parzysta i jedna nieparzysta.
- Wśród dowolnych trzech kolejnych liczb całkowitych dwie są tej samej parzystości, tj. są albo parzyste albo nieparzyste.
- Zauważmy jeszcze, że suma $m + n$ i różnica $m - n$ tych samych liczb całkowitych m i n są jednocześnie parzyste albo jednocześnie nieparzyste (mają *jednakową parzystość*).



By stwierdzić, czy dana liczba całkowita jest parzysta, nie musimy wykonywać dzielenia jej przez 2 i sprawdzać, czy wynik dzielenia jest liczbą całkowitą. Wygodne jest szybkie rozpoznawanie parzystości w oparciu o cechę podzielności przez 2: liczba całkowita (w układzie dziesiętnym) jest parzysta, wtedy i tylko wtedy, gdy jej cyfra jednostki jest parzysta.

Dodawanie w zakresie 20 jest dla większości uczniów dość proste, więc zapewne w naturalny sposób wszyscy „rzucą się” na poszukiwanie rozwiązania następującego problemu: „Na tablicy zapisano trzy jedynki, trzy trójki, trzy piątki, trzy siódemki oraz trzy dziewiątki. Czy spośród tych liczb można wybrać pięć, których suma jest równa 20?”. Celem tego zadania jest rozbudzenie ciekawości oraz przygotowanie uczniów do zrozumienia podstawowych własności arytmetyki parzystości.

Arytmetyka parzystości (przykłady)

W dalszym ciągu litery m, n, k, l będą oznaczały liczby całkowite. Będziemy też używali terminów – *jednakowa* lub *różna* parzystość. W sytuacji, w której jedna liczba jest parzysta, a druga nieparzysta, będziemy mówili, że mają różną parzystość. Analogicznie o liczbach parzystych (nieparzystych) mówimy, że mają jednakową parzystość.

1. Suma (różnica) dwóch liczb całkowitych o jednakowej parzystości jest parzysta.

Dla młodszych uczniów wystarczy zilustrować tezę przykładami, np. $24 + 52 = 76$ lub $35 + 17 = 52$. W klasach starszych warto przeprowadzać dowody. W tym celu weźmy dwie dowolne liczby całkowite oraz o tej samej parzystości.

Rozpatrzmy dwie sytuacje:

- a) m i n są parzyste, tj. $m = 2k$ oraz $n = 2l$ oraz k i l są całkowite. Wówczas suma $m + n = 2k + 2l = 2(k + l)$ jest liczbą parzystą, bo jest iloczynem 2 przez liczbę całkowitą $k + l$. Analogicznie różnica jest liczbą parzy-

stą, gdyż ma postać iloczynu 2 przez pewną liczbę całkowitą, tj. $m - n = 2(k - l)$ oraz $k - l$ jest liczbą całkowitą.

- b) m i n są nieparzyste, tj. mają postać $m = 2k + 1$, $n = 2l + 1$. Wystarczy pokazać, że zarówno suma, jak i różnica tych liczb ma postać iloczynu 2 przez liczbę całkowitą. A zatem $m + n = 2k + 1 + 2l + 1 = 2(k + l + 1)$ oraz $k + l + 1$ jest liczbą całkowitą, $m - n = 2k + 1 - 2l - 1 = 2(k - l)$ i $k - l$ jest liczbą całkowitą.

2.

Suma (różnica) dwóch liczb o różnej parzystości jest nieparzysta.

Dowód: jeżeli $m = 2k$ oraz $n = 2l + 1$ są dowolnymi liczbami o różnej parzystości, to ich suma (różnica) jest liczbą nieparzystą, gdyż ma postać:

$$m + n = 2k + 2l + 1 = 2(k + l) + 1$$

$$m - n = 2k - 2l - 1 = 2(k - l) - 1.$$

3.

O parzystości lub nieparzystości sumy decyduje parzystość liczby nieparzystych składników – jeśli liczba składników nieparzystych jest parzysta, to ich suma jest parzysta, jeśli nieparzysta liczba, to suma jest nieparzysta.

4.

Iloczyn liczb nieparzystych (nie tylko dwóch) jest nieparzysty.

Dowód: wystarczy zauważyć, że

$$(2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1 = 2k + 1.$$

5.

Iloczyn dowolnej liczby całkowitej przez liczbę parzystą jest parzysty.

Dowód: $m \cdot 2n = 2mn$ jest liczbą parzystą, niezależnie od parzystości liczby m .

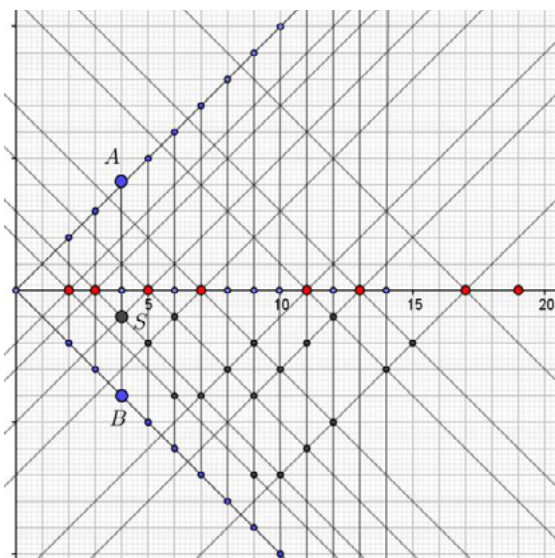
6.

Dla dowolnych liczb całkowitych m oraz n , liczby $mn(m + n)$ oraz $mn(m - n)$ są parzyste. Udowodnimy parzystość jednej z tych liczb, a w przypadku drugiej dowód jest analogiczny. Rozpatrzmy dwa przypadki. Załóżmy najpierw, że liczba m jest parzysta. Wówczas $mn(m + n) = 2kn(m + n) = 2l$ jest

liczbą parzystą. W sytuacji, gdy żadna z liczb m oraz n nie jest parzysta, ich suma (również różnica) jest parzysta, a więc $mn(m+n) = mn \cdot 2k = 2l$, czyli jest liczbą parzystą.

7.

Hipoteza Goldbacha: dowolna liczba naturalna parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych. Hipoteza ta nie została jeszcze udowodniona, ale sprawdzono jej prawdziwość dla bardzo wielu liczb i nie znaleziono kontrprzykładu. Zobaczmy ciekawą geometryczną interpretację tej hipotezy. Liczba parzysta $2n = n + n$ jest przedstawiana jako odcinek długości $2n$, który jest prostopadły do osi ox , a jego środkiem jest punkt $(n, 0)$.



Analogicznie, punkty, które są wyznaczone przez dwie proste oraz odcinek, pokazują rozkłady innych liczb parzystych na sumy dwóch liczb pierwszych. A zatem z kolejnych pionowych odcinków odczytamy długości jego części wyznaczonych przez taki punkt, np.:

$$\begin{aligned} 10 &= 7 + 3 \\ 12 &= 7 + 5 \\ 14 &= 7 + 7 \\ 16 &= 11 + 5 \end{aligned}$$

Na rysunku odcinek AB ma długość $8 = 2 \cdot 4$, a jego środek leży na osi ox w punkcie 4. Przez punkty, których odcięte są liczbami pierwszymi, kreślimy proste równoległe do półprostych wychodzących z początku układu współrzędnych i przechodzących przez końce badanych odcinków (czyli do półprostych OA i OB). Jeżeli proste takie przecinają się w punkcie, który leży na badanym odcinku (na rysunku oznaczonym literą S), to otrzymamy podział liczby $2n$ na dwa składniki będące liczbami pierwszymi.

Ćwiczenia z arytmetyki parzystości

1.

Liczba postaci $4n + 2020$ jest parzysta, a $6n + 2019$ nieparzysta, gdyż pierwsza z nich jest sumą dwóch liczb parzystych, druga sumą liczb o różnej parzystości. Podobnie liczby $5^n - 4$ oraz $7^n + 4$ są nieparzyste. Liczba $(2019 + 2020) \cdot 2017$ jest nieparzysta, gdyż jest iloczynem dwóch liczb nieparzystych. Proponujemy ocenić, w ramach przeciwieństwa tej zasady, które spośród liczb 2019^{2019} , 2018^{2019} , $2019^{2018} - 1$, $2018^{2019} + 1$ są parzyste, a które nieparzyste?

2.

Liczby postaci $n^2 + n = n(n+1)$ są parzyste, bo są iloczynami dwóch kolejnych liczb całkowitych. Z tego wynika, że liczba $\frac{m^2+n^2}{2} + \frac{m+n}{2}$ jest całkowita dla dowolnych całkowitych m oraz n , gdyż $\frac{m^2+n^2}{2} + \frac{m+n}{2} = \frac{m^2+m+n^2+n}{2} = \frac{m(m+1)+n(n+1)}{2}$ oraz licznik jest sumą dwóch liczb parzystych, a więc jest podzielny przez 2. Ponadto, łatwo zauważyć, że $(m^2+m+2019)(2n+2019)$ jest iloczynem dwóch liczb nieparzystych.

3.

Jeżeli $m - n$ jest liczbą nieparzystą, to co można stwierdzić o parzystości $(m+n)^2 + mn$? Z nieparzystości różnicy $m - n$ wynika, że liczby m oraz n są różnej parzystości (tj. jedna jest parzysta, a druga nieparzysta). Wówczas suma $m + n$ oraz jej kwadrat $(m+n)^2$ są nieparzyste, a iloczyn mn parzysty. Tym samym $(m+n)^2 + mn$ jest liczbą nieparzystą.

Kolejne zaproponowane zadania pozostawiamy do samodzielnego rozwiązania.

4.

Dlaczego iloczyn wszystkich liczb pierwszych mniejszych od 1000 jest liczbą parzystą?

5.

Która z liczb $4m + 4$ czy $m^2 - 1$ ma parzystość niezależną od parzystości m ?

6.

Różnicę dwóch dowolnych liczb mnożymy przez ich iloczyn. Czy w ten sposób można otrzymać liczbę 2019?

7.

Dwaj kosmici mogą złapać się za ręce, mimo że mają po trzy ramiona. Dlaczego trzech kosmici nie mogą tego zrobić?

8.

Weź dowolne trzy liczby całkowite i sprawdź, czy spośród nich możesz wybrać dwie, których suma jest parzysta. Uzasadnij, że tak można zrobić dla dowolnych trzech liczb całkowitych.

9.

Wyjaśnij, dlaczego różnica kwadratów dowolnych nieparzystych liczb pierwszych jest podzielna przez 4?

10.

Zbiór liczb parzystych i zbiór liczb nieparzystych dzielą zbiór liczb całkowitych na dwa podzbiory. Sprawdź, czy dla dowolnych liczb m i n jednego z tych zbiorów, liczba $mn - 1$ należy do drugiego.

11.

Ile wśród liczb 1, 2, 3, ..., 2019 jest parzystych, a ile nieparzystych? O ile suma tych liczb nieparzystych jest większa od sumy liczb parzystych? Jeżeli wypiszemy rozpatrywane liczby w dwóch wierszach, w jednym nieparzyste, w drugim parzyste:

1	3	5	7	...	2013	2015	2017	2019
2	4	6	8	...	2014	2016	2018	

to zauważymy, że liczb nieparzystych jest o jedną więcej. W pierwszym wierszu mamy 1010 liczb, a drugim 1009. Dodatkowo w każdej kolumnie różnica pomiędzy pierwszym a drugim wierszem

jest równa -1 , co pozwala porównać sumy liczb nieparzystych i parzystych:

$$(-1) \cdot 1009 + 2019 = 1010$$

12.

Dlaczego nie można odwrócić kolejności liczb 1, 2, 3, 4, ..., 2018, 2019, 2020 za pomocą następującej operacji: w każdym ruchu można zamienić miejscami dowolnie wybrane dwie liczby rozdzielone trzecią? Opisana operacja zachowuje parzystość miejsc, tzn. liczby parzyste zostaną przedstawione na miejsca parzyste, a nieparzyste na nieparzyste. Tym samym liczba parzysta 2020 nie może zająć miejsca liczby 1 (nieparzystej).

13.

Uzasadnij, że spośród 2019 dowolnych liczb całkowitych można wybrać jedną tak, że suma pozostałych będzie parzysta. Jeżeli wszystkie dane liczby byłyby nieparzyste, to wystarczy dowolną pominąć, a suma pozostałych 2018 liczb jest parzysta. Łatwo jest zauważyć, że gdyby wszystkie liczby były parzyste, to odrzucając jedną z nich i dodając pozostałe, otrzymamy sumę parzystą. Załóżmy teraz, że wśród danych 2019 liczb znajdują się liczby parzyste oraz nieparzyste. Jeśli liczb nieparzystych jest parzysta ilość, to wystarczy odrzucić jedną z liczb parzystych, by pozostałe parzyste oraz parzysta ilość nieparzystych dały sumę parzystą. Gdyby jednak liczb nieparzystych było nieparzyste wiele, to po odrzuceniu jednej liczby nieparzystej suma pozostałych będzie liczbą parzystą.

14.

Czy pomiędzy liczby 1 2 3 4 ... 2017 2018 można wstawić znaki + (plus) oraz - (minus) w taki sposób, by otrzymać wyrażenie, które ma wartość 0? Ponieważ parzystość sumy i różnicy tych samych liczb jest jednakowa, to wstawiając znaki + (plus) oraz - (minus) w dowolne miejsca, otrzymamy wyrażenia liczbowe o takiej samej parzystości, jaką ma suma $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2017 + 2018 = 2019 \cdot 1009$, tj. otrzymamy liczbę nieparzystą, a więc nigdy nie otrzymamy 0.

15.

Czy zbiór liczb 1, 2, 3, ..., 2018, 2019 można podzielić na dwa zbiory w taki sposób, by największa liczba w każdym z podzbiorów była równa sumie pozostałych liczb tego podzbioru?

16.

W zwykłej szachownicy 8×8 wycięto dwa narożne pola na jednej z przekątnych, np. pole $a1$ oraz $h8$. Czy kostkami domino o wymiarach 2×1 można pokryć tę szachownicę? Wprawdzie cała szachownica, jak i ta z wyciętymi narożnikami mają parzyste liczby pól, więc wydawać się może, że takie pokrycie jest możliwe. Po dokładniejszej analizie zauważymy, że wycięto dwa pola czarne, a więc na szachownicy pozostało 30 czarnych oraz 32 białe pola. Jedną kostką pokrywamy dwa pola, jedno białe i jedno czarne. A zatem pokrycia, o którym mowa w zadaniu, nie można wykonać.

17.

Na każdym polu zwykłego kwadratu 4×4 położono kartkę z liczbą 1 lub -1 , razem 16 kartek z liczbą 1 oraz tyle samo z -1 . Załóżmy, że możemy wszystkie liczby dowolnego wiersza lub kolumny mnożyć przez -1 . Czy jest możliwe, by po kilku takich operacjach doprowadzić do sytuacji, w której liczba -1 wystąpi 31 razy, a liczba 1 tylko raz? Rozpatrzmy dowolny wiersz (lub kolumnę) i załóżmy, że liczba 1 występuje w nim n razy. Wtedy liczba -1 występuje $4 - n$ razy. Jeśli wszystkie liczby tego wiersza pomnożymy przez -1 , to łatwo określmy, o ile zmieni się liczba kartek z liczbą -1 : $n - (4 - n) = 2n - 4$, czyli zmieni się o liczbę parzystą. A zatem po dowolnej liczbie dozwolonych operacji, liczba kartek z -1 zawsze będzie parzysta, nigdy zaś nie wyniesie 31.

18.

Dlaczego każda oś symetrii wielokąta foremnego o nieparzystej liczbie boków przechodzi przez wierzchołek tego wielokąta?

19.

Które z poniższych sum są liczbami parzystymi, a które nieparzystymi?

a) $1 + 2 + 3 + \dots + 2019$

b) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 2017 + 2018 - 2019$

c) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 2018 - 2019 + 2020$

d) $1 \cdot 2019 + 2 \cdot 2018 + 3 \cdot 2017 + \dots + 2018 \cdot 2 + 2019 \cdot 1$

20.

Jaka jest ostatnia cyfra liczby $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2019$?

21.

W wierzchołkach n -kąta napisano liczby 1 oraz -1 , a na środku każdego boku zapisano iloczyn liczb na jego końcach. Suma liczb zapisanych na środkach boków jest równa 0. Uzasadnij, że n jest liczbą parzystą.

22.

Udowodnij, że jeśli liczba naturalna jest iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych, to jest również sumą trzech kolejnych liczb naturalnych.

23.

Przy okrągłym stole siedzą chłopcy i dziewczynki. Uzasadnij, że liczba par dzieci siedzących obok o różnej płci jest parzysta.

24.

Na okręgu zapisano siedem liczb naturalnych. Uzasadnij, że są wśród nich dwie sąsiednie, których suma jest parzysta.

25.

Na stole leży 21 monet reszką do góry. W jednym ruchu odwracamy na drugą stronę 20 z tych monet. Czy jest możliwe, by po kilku takich ruchach wszystkie monety leżały orłem do góry?

26.

Takie samo pytanie jak poprzednie, ale z liczbą monet 20 i liczbą odwracanych monet w każdym ruchu 19.

27.

Dwie równoliczne klasy napisały pracę klasową. Nauczyciel, który sprawdzał te prace, stwierdził, że postawił o 13 ocen niedostatecznych więcej niż pozostałych ocen. Czy nauczyciel pomylił się?

28.

Uzasadnij, że jeżeli dowolne trzy liczby spośród pięciu liczb całkowitych mają sumę parzystą, to wszystkie liczby (5) są parzyste.

29.

Siedmiu przedszkolaków ma po dwa balony: czerwony i zielony. Czy mogą się nimi zamienić tak, by każdy z nich miał dwa balony jednego koloru?

30.

Kilkoro uczniów ustawiło się w okręgu i wzięło za ręce. Okazało się, że każda osoba trzyma za ręce albo dwóch chłopców albo dwie dziewczynki. Jeśli w tym kręgu było 5 chłopców, to ile było dziewcząt?

31.

Na szachownicy o wymiarach 25×25 ustawiono 25 pionków symetrycznie względem przekątnej. Uzasadnij, że przynajmniej jeden pionek stoi na tej przekątnej.

32.

Czy kwotę 25 talarów można wypłacić dziesięcioma talarami o nominałach 1, 3 i 5 talarów?

33.

Rozpatrzmy 2019 liczb będących sumami:

$$\begin{aligned} &1, \\ &1 + 2, \\ &1 + 2 + 3, \\ &1 + 2 + 3 + 4, \\ &\dots \\ &1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2019. \end{aligned}$$

Ile z nich to liczby parzyste?

34.

Jaką resztę przy dzieleniu przez 6 daje liczba 1000...02, której pierwszą cyfrą jest 1, a po niej następuje 2019 zer i jako ostatnia cyfra 2?

35.

Ile jest liczb trzycyfrowych, których każda cyfra jest parzysta?

36.

Komputer napisał 2020 liczb jednocyfrowych, z których co czwarta była parzysta, a pozostałe – nieparzyste. Ile może maksymalnie wynosić suma tych liczb, jeśli 123 z nich były zerami?

37.

Szymon postanowił przy każdym wierzchołku 13-kąta napisać liczbę całkowitą, tak żeby suma

liczb na końcach każdego boku była nieparzysta. Uzasadnij, czy to możliwe?

38.

Uzasadnij, że liczby 20182019 nie można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych.

39.

Czy istnieje liczba naturalna, której iloczyn cyfr jest równy 997920?

40.

Czy pomiędzy sąsiednimi cyframi 1 2 3 4 5 6 7 8 9 można tak wstawić znaki + (plus) oraz – (minus), by otrzymać wyrażenie liczbowe o wartości 0?

41.

98 żetonów podzielono na 19 stosów i przy każdym z nich napisano liczbę żetonów w stosie. Czy iloczyn tych liczb może być liczbą nieparzystą?

42.

Na tablicy napisano kilka kolejnych liczb naturalnych. Dokładnie 52% z nich to liczby parzyste. Ile liczb parzystych napisano na tej tablicy?

43.

Gospodarz 34-osobowej klasy napisał na kartce liczbę 20, a pozostali uczniowie kolejno dodają lub odejmują 1. Czy można w ten sposób otrzymać liczbę 10?

Abstract

Parity in School Mathematics

This article is a selection of chosen original exercises related to the parity of numbers. The tasks have been provided with theoretical issues, explained and prepared in such a manner that a teacher might use them in class. The presented exercises are, on the one hand, a ready educational material and on the other hand, they may be an inspiration for creating one's own sets of exercises.

Jerzy Kołodziejczyk

Dyrektor Szkoły Podstawowej nr 4 im. I Samodzielnej Warszawskiej Brygady Kawalerii w Gryficach.

Ile jest matematyki w informatyce?

Krzysztof Makles

Analiza wybranych zapisów podstawy programowej

Zakres oddziaływania informatyki na nasze życie jest bardzo szeroki i wciąż wzrasta. Informatyk to nie tylko programista, ale także specjalista od sieci komputerowych, baz danych, farm serwerów, analityk systemowy, ktoś, kto niekoniecznie pracuje w wielkiej korporacji, ale w małym mieście, w lokalnej firmie czy też szkole albo urzędzie i dba o wprowadzenie oraz utrzymanie systemów informatycznych – tak potrzebnych w dobie cyfryzacji administracji państwowej. W zawód informatyka wpisane jest ciągłe uczenie się i rozwój. Techniki i techno-

logie informatyczne wciąż się zmieniają, a informatyk musi podążać za nimi. Dobrze wykształcony informatyk potrafi zarówno obsługiwać i posługiwać się sprzętem komputerowym i oprogramowaniem, ale również zna zasady działania oraz funkcjonowania stosowanych rozwiązań. Wiedza ta jest bardzo silnie powiązana z matematyką i od tego, jak wiedzę z zakresu matematyki i informatyki przyswoi sobie uczeń szkoły średniej, może zależeć jego powodzenie na studiach wyższych, a ostatecznie to, jakim będzie fachowcem.

Informatyka jako specjalista

Informatyka (łac. *informatio* – ‘wyobrażenie’, ‘wizerunek’, ‘pomysł’), dyscyplina naukowa zajmująca się przetwarzaniem informacji z użyciem komputerów; obejmuje teorie informatyczne, budowanie systemów informatycznych (w tym programowanie), budowę i działanie sprzętu komputerowego, zastosowania metod informatycznych w różnych dziedzinach działalności ludzkiej i in. Teorie informatyczne zajmują się badaniem zjawisk związanych z operowaniem informacją – jej przedstawianiem, przechowywaniem, uzyskiwaniem, porządkowaniem, przetwarzaniem. Prawa rządzące tymi zjawiskami leżą u podstaw budowy narzędzi informatyki, będących obiektami fizycznymi (głównie komputerami) i logicznymi (algorytmami, językami programowania, programami, strukturami danych). Te z kolei stanowią przedmiot badań działów teoretycznych informatyki. Informatyka posługuje się językiem i metodami matematyki, logiki matematycznej i specyficznych dziedzin, takich jak: teoria języków formalnych i automatów abstrakcyjnych, teoria algorytmów, teoria obsługi masowej; teorie te tworzą również swój własny język i metody¹.

Przytoczony opis hasła *informatyka*, zaczerpnięty z encyklopedii PWN, w pełni określa miejsce informatyki we współczesnym świecie oraz jej metody i źródła. Obserwując gwałtowny rozwój informatyki w ciągu ostatnich dwóch dekad oraz jej wpływ na życie społeczeństw, nietrudno stwierdzić, że obecny rozwój ludzkości jako takiej opiera się i jest uzależniony od informatyki. Oddzielną kwestią, z pogranicza filozofii, jest to, czy to dobrze dla ludzkości, czy też nie. W najbliższych latach wzrośnie w naszym życiu udział rozwiązań typu IoT (Internet of Things – internet rzeczy), co powiązane jest zarówno z usprawnianiem procesów produkcji (program „Przemysł 4.0”), jak i jeszcze większym udziałem informatyki i elektroniki programowalnej w naszym otoczeniu.

Dobłą stroną takiego stanu rzeczy jest to, że zapotrzebowanie na fachowców z dziedziny informatyki nie będzie słabło, a raczej przeciwnie, będzie wzrastało. Według Komisji Europejskiej w Polsce brakuje od 30 do 50 tys. programistów. W skali Unii Europejskiej prognozowana liczba wakatów ma wynosić 600 tys. Absolwenci wskazują trzy główne źródła nauki programowania: pracę (25%), studia (22%) oraz samouczki w internecie – tutoriale (20%). Pozostałe wskazywane źródła to: kursy internetowe i książki (po około 12%), szkoły programowania, projekty Open Source, Bootcampy i szkolenia firmowe (każde poniżej 5%)².

Wskazuje się dwie przyczyny deficytu informatyków: niż demograficzny oraz małą liczbę absolwentów wchodzących na rynek pracy każdego roku. Jako przykład wskażę Wydział Informatyki Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego w Szczecinie. Roczna średnia liczba absolwentów w danym roku akademickim to około 160 osób (studia I i II stopnia, dzienne i niestacjonarne). W ujęciu procentowym, porównując ilu absolwentów danego rocznika rozpoczęło studia, a ilu (po 3,5 roku – studia dzienne I stopnia) je ukończyło, tylko 45% naboru broni prace inżynierskie. Analizując przyczyny porażki u znakomitej części studentów, można zauważyć, że główny problem stanowi opanowanie wiedzy z zakresu matematyki. Przedmioty matematyczne lub powiązane ściśle z matematyką w toku studiów to: algebra liniowa, matematyka dyskretna, matematyka stosowana ze statystyką, metody numeryczne i sztuczna inteligencja (teoria zbiorów rozmytych, algorytmy genetyczne, sieci bayesowskie).

Informatyka a matematyka

Wracając do opisu hasła *informatyka*, warto zauważyć, że „informatyka posługuje się językiem i metodami matematyki, logiki matematycznej i specyficznych dziedzin”. Często powtarzam swoim uczniom oraz studentom, że informatyka

ka to matematyka stosowana. Jeżeli nie opanują w stopniu dobrym aparatu matematycznego potrzebnego do zrozumienia procesów, które stoją za różnymi algorytmami, metodami, czy też narzędziami, nie będą dobrymi informatykami, potrafiącymi rozwiązywać w sposób kreatywny stawiane przed nimi problemy (nie wszystkie rozwiązania problemów znajdują się w Google'u).

Dlatego tak ważną rolę odgrywa powiązanie wiedzy z zakresu matematyki oraz umiejętności rozwiązywania zadań problemowych z umiejętnością programowania już na poziomie szkoły średniej. Zmieniająca się podstawa programowa zdefiniowała nowe cele i treści nauczania przedmiotu informatyka zarówno na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym.

Oprócz celów, które skupiają się na umiejętności obsługiwanym określonych grup narzędzi informatycznych i umiejętnościach związanych z kompetencjami społecznymi, określono cel leżący na styku matematyki oraz informatyki: programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych – układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.

Już w zakresie podstawowym przedmiotu pojawiają się treści związane z podstawowymi algorytmami, stosowanymi w informatyce. Wymaga to od nauczyciela przypomnienia lub wprowadzenia na nowo pojęcia algorytmu, uporządkowania informacji na temat graficznej reprezentacji algorytmów (schemat blokowy), oraz opisu słownego (lista kroków). Na tym etapie edukacji należy wyrobić w uczniach umiejętność interpretowania algorytmów, co pozwoli później przejść do nauki programowania w oparciu o poznane algorytmy. Należy wprowadzić także pojęcie zmiennej oraz typów danych stosowanych w programowaniu (znaki, liczby całkowite, liczby rzeczywiste). Wymaga to także wskazania uczniom, że typy danych liczbo-

wych są zbiorami ograniczonymi i w informatyce pojęcie nieskończoności jest trudne do wyrażenia. Przywołując poszczególne treści, pozwolę sobie na komentarze (które umieszcze w nawiasach), zawierające moje przemyślenia na temat wraz ze wskazaniem, znajomość jakich zagadnień z zakresu matematyki pomoże uczniom w zrozumieniu zagadnień z informatyki.

Zakres podstawowy

W zakresie podstawowym podstawa programowa (punkt I. *Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów*) wskazuje algorytmy:

- na liczbach: badanie pierwszości liczby (wymagana znajomość pojęć liczba pierwsza/liczba złożona); zamiana reprezentacji liczb pomiędzy pozycyjnymi systemami liczbowymi ze szczególnym wskazaniem na systemy dziesiętny, binarny i szesnastkowy (wymagana znajomość pojęcia system pozycyjny na przykładzie systemu dziesiętnego); działanie na ułamkach z wykorzystaniem NWD i NWW (wymagana znajomość pojęć NWW i NWD i zależności między nimi);
- na tekstach: porównywanie tekstów, wyszukiwanie wzorca w tekście metodą naiwną, szyfrowanie tekstu metodą Cezara i przestawieniową (nauczyciel powinien wskazać, w jaki sposób komputer interpretuje liczby, czym jest tablica ASCII, jak zapewnić cykliczność znaków w alfabecie tak, aby po literze z wrócić do litery a);
- porządkowanie ciągu liczb: przez wstawianie i metodą bąbelkową (wymagane ogólne informacje na temat zbiorów liczbowych; należy zwrócić uwagę na to, że złożoność obliczeniowa wskazanych algorytmów jest klasy n^2);
- wydawania reszty najmniejszą liczbą nominałów (ogólne umiejętności obliczeniowe);
- obliczania wartości elementów ciągu metodą iteracyjną i rekurencyjną, w tym wartości elementów ciągu Fibonacciego (znajomość

pojęcia ciągu; nauczyciel powinien wyjaśnić i uzupełnić wiedzę na temat metod iteracyjnych oraz rekurencyjnych, gdzie rekurencja jest pojęciem trudniej przyswajalnym przez uczniów; w przypadku samego wyznaczania elementów ciągu Fibonacciego wykazanie, że pomimo jego rekurencyjności wprost, realizacja iteracyjna jest bardziej korzystna pod kątem zarówno czasu obliczeń, jak i złożoności pamięciowej).

Podstawa programowa wskazuje również umiejętności analityczne, które powinien posiadać uczeń:

- wyróżnia w problemie podproblemy i charakteryzuje: metodę połowienia, stosuje podejście zachłanne i rekurencję (pojęcia same w sobie trudne; należy wskazać zalety podejścia, w którym zadanie dzielimy na mniejsze, łatwiejsze do rozwiązania podzadania; wskazanie problemów, w których podejście rekurencyjne wykazuje się większą łatwością w oprogramowaniu, oraz mniejszą złożonością czasową, zaś podejście zachłanne wybiera w danym momencie realizacji algorytmu decyzje, które są lokalnie optymalne; to prowadzi do wyjaśnienia pojęć rozwiązania optymalnego, w ogóle pojęcia optymalności rozwiązania, gdyż obecnie nadużywa się określenia, że coś jest optymalne);
- porównuje działanie różnych algorytmów dla wybranego problemu, analizuje algorytmy na podstawie ich gotowych implementacji (ważne jest, aby omawiając algorytmy formalnie rozwiązujące ten sam problem, wskazać uczniowi wady i zalety wybranych algorytmów w taki sposób, aby uczeń rozumiał, jak krytycznym elementem w rozwiązywaniu problemów informatycznych jest zestaw danych wejściowych; jednocześnie, nawiązując do poprzedniego podpunktu, należy wskazać na znaczenie rozwiązań lokalnie optymalnych);
- sprawdza poprawność działania algorytmów dla przykładowych danych (nauczyciel powinien położyć nacisk na zagadnienie sprawdza-

Często powtarzam studentom, że informatyka to matematyka stosowana. Jeżeli nie opanują w stopniu dobrym aparatu matematycznego potrzebnego do zrozumienia procesów, które stoją za różnymi algorytmami, metodami, czy też narzędziami, nie będą dobrymi informatykami.

nia poprawności wyników generowanych przez program komputerowy, które nie powinno się sprowadzać jedynie do pobieżnego sprawdzenia poprawności otrzymanych wyników tylko dla wąskiego zakresu danych wejściowych, ale także dla przypadków skrajnych, brzegowych).

W punkcie II podstawy programowej dla zakresu podstawowego (programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera i innych urządzeń cyfrowych) z punktu widzenia matematyki i informatyki istotny jest podpunkt pierwszy o brzmieniu „uczeń projektuje i programuje rozwiązania problemów z różnych dziedzin, stosuje przy tym: instrukcje wejścia/wyjścia, wyrażenia arytmetyczne i logiczne, instrukcje warunkowe, instrukcje iteracyjne, funkcje z parametrami i bez parametrów, testuje poprawność programów dla różnych danych; w szczególności programuje algorytmy z punktu I.2”). W ten sposób nauczyciel ma jasne wskazanie na zakres konstrukcji wybranego języka programowania (C/C++ lub Python), które uczniowie powinni opanować. Na przykładzie języka C/C++ będą to:

- instrukcje *cout* i *cin*, pojęcie łańcucha znaków, łączenie łańcuchów ze zmiennymi, czytelne

wyrażanie komunikatów skierowanych do użytkownika programu oraz czytelna prezentacja wyników działania opracowanego programu komputerowego;

- określenie, czym są wyrażenia arytmetyczne, przypisywanie ich wyników do zmiennych lub przekazywanie bezpośrednio do prezentacji na ekranie poprzez *cout*; różnica pomiędzy przypisaniem (znak *=*), a porównaniem (operacja logiczna, znak *==*); dopuszczalne wyrażenia logiczne; koniunkcja i alternatywa wyrażeń logicznych (w przypadku, gdy uczniowie znają z lekcji matematyki te terminy z działań na zbiorach, przełożenie tej wiedzy na znaczenie w informatyce jest prostsze);
- wyrażanie warunków, czyli rozgałęzień w algorytmie, poprzez konstrukcję *if(warunek), if(warunek) ... else*, zagnieżdżanie warunków, stosowanie wyrażeń arytmetycznych oraz logicznych w warunkach (w tym przypadku zawsze warto zwrócić uwagę na przełożenie algorytmu na kod programu, wskazanie, że gdy dobrze zrozumiemy schemat blokowy algorytmu, łatwiej jest napisać program, który ten algorytm realizuje w sposób poprawny; algorytm jest pomocnikiem – zanim podejmiemy do rozwiązania problemu i napisania programu, lepiej poszukać algorytmu, który w całości lub częściowo rozwiązuje nasz problem, niż tracić czas na opracowanie własnego rozwiązania; pokazuje to znaczenie algorytmiki w informatyce);
- instrukcje iteracyjne w trzech postaciach: *for(iterator; warunek; inkrementacja/dekrementacja iteratora)*, *while(warunek)* i *do ... while(warunek)*; zagadnienie ważne z tego powodu, że większość omawianych później algorytmów to rozwiązania iteracyjne; należy dobrze wykazać uczniom zamienność konstrukcji *for()* oraz *while()*; z biegiem czasu uczniowie opanowują iteracyjne wyrażanie problemów, ale należy zwrócić uwagę na składnię w konstrukcji

for(); częstym błędem jest pisanie przecinków zamiast średników (separatorów parametrów w konstrukcji *for()*);

- funkcje w językach wysokiego poziomu, jako narzędzie do wydzielania tych fragmentów kodu programu, które są dla niego istotne (łatwiejsze znalezienie kodu odpowiedzialnego za daną funkcjonalność programu) lub często powtarzane (redukcja redundancji kodu); należy rozpocząć od definicji i przykładu funkcji, która zarówno zwraca wartość, jak i posiada parametry (*typ nazwa(parametry)*); następnie trzy pozostałe możliwości definiowania funkcji: posiada parametry, ale nie zwraca wartości (*void nazwa(parametry)*), zwraca wartość, ale nie posiada parametrów (*typ nazwa(void)*), nie zwraca wartości i nie posiada parametrów (*void nazwa(void)*); ważne jest, aby pokazać uczniom, w jaki sposób według danej definicji wywołać funkcję w programie, ogólnie wyjaśnić, w jaki sposób wartości parametrów są przekazywane z programu do funkcji; w mojej ocenie zagadnienie trudne, sprawiające problemy wielu uczniom; jednym z takich problemów jest podjęcie decyzji, które zmienne są parametrami funkcji, a które zmiennymi lokalnymi w funkcji.

Zakres rozszerzony

Rozszerzony zakres podstawy programowej z informatyki rozwija umiejętności i wiedzę z zakresu podstawowego, szczególnie w obszarze rozumienia i stosowania zaawansowanych metod programistycznych oraz analitycznych. Można zauważyć, że uczniowie potrafiący w sposób analityczny podchodzić do zadań z matematyki i rozumiejący mechanizmy stosowane w matematyce do rozwiązywania problemów znacznie lepiej radzą sobie z rozwiązywaniem zadań z zakresu informatyki.

Szczególnie ważne jest to w przypadku punktu I zakresu rozszerzonego podstawy progra-

mowej: *Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów*. W powiązaniu z matematyką, uczeń w zależności od problemu rozwiązuje go, stosując metodę wstępującą lub zstępującą, czyli od szczegółu go ogółu lub od ogółu do szczegółu. Programowanie zstępujące (podział problemu na podproblemy, które są łatwiej rozwiązywalne) jest, w przypadku języków wysokiego poziomu, najczęściej wykorzystywane i uczniowie stosują tę metodę w sposób naturalny. Programowanie wstępujące stosuje się jako uzupełnienie zstępującego. Punkty I.2 i I.3 skupiają się na umiejętnościach związanych z algorytmami (dobór algorytmów, ocena efektywności i poprawności rozwiązania). Te umiejętności wymagają znajomości i rozumienia różnych algorytmów służących do rozwiązania tej samej klasy problemów. W mojej ocenie na odpowiednio wysokim poziomie umiejętności te będą prezentowali uczniowie, którzy samodzielnie zgłębiają problemy algorytmiczne (reprezentują szkołę w konkursach programistycznych, w olimpiadzie informatycznej).

Silne powiązanie z matematyką zauważyć można w punkcie I.4: uczeń „ilustruje i wyjaśnia rolę pojęć, obiektów i operacji matematycznych w projektowaniu rozwiązań problemów informatycznych i z innych dziedzin, posługuje się pojęciem logarytmu”. Podobnie w punktach I.6 i I.7, które skupiają się na aspektach obliczeniowych, wynikających z budowy współczesnych urządzeń komputerowych: binarna reprezentacja danych, podstawowe operacje matematyczne na liczbach binarnych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie z resztą), i błędy w obliczeniach wynikające z przyjętej arytmetyki (stałopozycyjna, zmiennopozycyjna, błędy zaokrągleń, błędy przybliżenia). Omówienie tych zagadnień poszerza wiedzę zdobytą przez uczniów na lekcjach matematyki.

Ostatnim punktem podstawy programowej dla zakresu rozszerzonego, który jest ściśle związany z programowaniem, jest punkt III. W podpunkcie III.1 uczeń zapisuje za pomocą listy

kroków, schematu blokowego lub pseudokodu, i implementuje w wybranym języku programowania, algorytmy poznane na wcześniejszych etapach oraz algorytmy:

- algorytm Euklidesa w wersji iteracyjnej i rekurencyjnej wraz z zastosowaniami – uczeń powinien znać pojęcie największego wspólnego dzielnika (uczniowie zawsze są zaskoczeni, że to tak oczywisty algorytm i łatwy w oprogramowaniu);
- znajdowania określonego elementu w zbiorze: lidera, idola, elementu w zbiorze uporządkowanym metodą binarnego wyszukiwania – wymagana jest znajomość określeń lider i idol w zbiorze;
- generowania liczb pierwszych metodą sita Eratostenesa – uczeń powinien znać pojęcie liczby pierwszej, sam algorytm sprawia problemy w oprogramowaniu ze względu na koncepcję zastosowania tablicy prawda/fałsz (wartość 1 na tych pozycjach w tablicy, które reprezentują liczbę pierwszą, a wartość 0 na tych pozycjach, które reprezentują liczbę złożoną);
- jednoczesnego wyszukiwania elementu najmniejszego i największego (typowy algorytm tablicowy, niesprawiający uczniom większego kłopotu);
- sortowania ciągu liczb przez scalanie – wymagana jest znajomość algorytmów sortowania, aby ułożyć elementy w dwóch zbiorach, a następnie scalić je zgodnie z regułami algorytmu sortowania przez scalanie;
- wyznaczania miejsc zerowych funkcji metodą połowienia – pierwszy z algorytmów numerycznych w tym punkcie podstawy; wymagana jest znajomość pojęcia miejsca zerowego funkcji; w realizacji algorytmu uczeń powinien zastosować konstrukcję typu funkcja (jest to dobry moment na sprawdzenie, którzy uczniowie nie potrafią zdefiniować samodzielnie funkcji);
- obliczania przybliżonej wartości pierwiastka kwadratowego – uczeń powinien znać pojęcie

pierwiastek kwadratowy (sam algorytm jest dla uczniów bardzo intrygujący; przy okazji omówienia algorytmu warto również przypomnieć, jakie operacje matematyczne procesor potrafi wykonać na podstawie jego mikro kodu wewnętrznego, a pozostałe muszą być wyrażone poprzez metody numeryczne, które bazują na podstawowych operacjach matematycznych – dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie);

- obliczania wartości wielomianu za pomocą schematu Hornera – wymagana jest znajomość pojęcia wielomianu oraz chociaż jedno zastosowanie schematu Hornera w matematyce (uczniowie są zaskoczeni, do rozwiązywania jakich problemów matematycznych można stosować schemat Hornera; jedno z trudniejszych zagadnień programistycznych);
- szybkiego potęgowania liczb w wersji iteracyjnej i rekurencyjnej – w tym przypadku wykorzystuje się binarną reprezentację wykładnika (algorytm nieskomplikowany w oprogramowaniu, niesprawiający kłopotów uczniom, chyba że zapomnieli, w jaki sposób wyznacza się reprezentację binarną liczby dziesiętnej);
- badania położenia punktu względem prostej i przynależności punktu do odcinka – uczeń powinien znać podstawy teoretyczne z geometrii dotyczące określania w planimetrii punktów, odcinków oraz prostej (jedno z łatwiejszych zagadnień, nieprzysparzających uczniom problemów w oprogramowaniu);
- rekurencyjnego tworzenia fraktali: zbiór Cantora, drzewo binarne, dywan Sierpińskiego, płatek Kocha – najbardziej spektakularna część związana z programowaniem, w zależności od podejścia nauczyciela, możliwa do zrealizowania w postaci programu komputerowego lub w postaci arkusza kalkulacyjnego; ze względu na długi czas realizacji programu komputerowego, najczęściej wybierana jest prezentacja w arkuszu kalkulacyjnym.

W punkcie III.2 uczeń wykorzystuje znane sobie algorytmy przy rozwiązywaniu i programowaniu rozwiązań następujących problemów:

- rozkładanie liczby na czynniki pierwsze – wymagana jest wiedza na temat, czym jest czynnik pierwszy liczby;
- wykonywanie działań na liczbach w systemach innych niż dziesiętny – uczeń powinien wiedzieć, co to są systemy liczbowe pozycyjne; metoda przeliczania z danego systemu liczbowego na dziesiętny opiera się na sumie iloczynów cyfr pomnożonych przez podstawę systemu podniesioną do potęgi równej pozycji, na której znajduje się cyfra; przeliczanie na dany system liczbowy z systemu dziesiętnego opiera się na wyznaczaniu reszt z dzielenia przez podstawę systemu, na który przeliczamy liczbę dziesiętną;
- znajdowanie w ciągu podciągów o różnorodnych własnościach, na przykład najdłuższego spójnego podciągu niemalejącego, spójnego podciągu o największej sumie – umiejętność z pogranicza analizy złożonych danych, przysparzająca uczniom sporo problemów, wymagająca oswojenia się z pojęciem ciągu w matematyce;
- zamiana wyrażenia na postać w odwrotnej notacji polskiej i obliczanie jego wartości na podstawie tej postaci – z nazwy rzecz polska, jednak nie omawiana nigdy na lekcjach matematyki; uczniowie mają problemy z oswojeniem się z tą notacją, nauczyciel powinien wskazać zakres zastosowania odwrotnej notacji polskiej (ONT);
- badanie przecinania się odcinków, przynależności punktu do trójkąta – wymaga znajomości pojęć z geometrii (zagadnienia z grupy niesprawiających uczniom trudności przy dobrym przygotowaniu na lekcjach matematyki);
- obliczanie przybliżonej wielkości pola obszarów zamkniętych – zagadnienie z pogranicza całkowania, które z nazwy budzi w uczniach

niepokój, ale po wytłumaczeniu okazuje się w miarę proste w oprogramowaniu (warto omówić, chociaż pobieżnie, różne metody całkowania numerycznego, ale skupić się na całkowaniu numerycznym metodą prostokątów).

Algorytmy wskazane powyżej we wcześniej obowiązującej podstawie programowej określone były jako zaawansowane. Zagadnienia z planimetrii są z reguły bardziej zrozumiałe dla uczniów, pozostałe, odpowiednio omówione, zaklasyfikować można do średnio trudnych.

Ostatni z punktów, nawiązujących w podstawie programowej z informatyki do matematyki, to punkt III.3. Wiele treści wskazanych w tym podpunkcie nawiązuje do algorytmów omówionych w poprzedzających podpunktach, ale dwa są istotne z punktu widzenia nauczania matematyki:

- metoda Monte Carlo (obliczanie przybliżonej wartości liczby π , symulacja ruchów Browna) – jako metoda o podłożu statystycznym; nauczyciel matematyki mógłby wspomnieć o niej na lekcji przy okazji korzystania z liczby π , wyjaśniając jej znaczenie oraz sposoby wyznaczania;
- grafy (do przedstawiania abstrakcyjnego modelu sytuacji problemowych) – w minionej podstawie programowej nie wspomniano o grafach, a temat jest bardzo rozległy; wskazane jest, aby nauczyciele informatyki oraz matematyki współpracowali ze sobą w tym trudnym zagadnieniu tak, aby uczniowie poznali podstawy wykorzystania reprezentacji grafowej w informatyce.

Przypisy

- ¹ Encyklopedia PWN, hasło: informatyka, encyklopedia.pwn.pl/haslo/informatyka;3914698.html, data dostępu: 3.12.2019.
- ² Dane pochodzą z raportu No Fluff Jobs „Zarobki w branży IT w 2017 roku”. Badanie zostało przeprowadzone w dniach 15 grudnia 2017 – 30 stycznia 2018 roku. Wzięło w nich udział 2153 osób pracujących w branży informatycznej.

Abstract

Computer Science Didactics and Mathematics

In this article the author analyses the computer science curriculum – both basic and extended – and shows its connections with mathematics. Nowadays both sciences are inextricably intertwined and teaching computer science should always be linked with teaching mathematics. Therefore, properly selected contents and teaching methods can contribute to better didactic effects and student performance in both subjects. The purpose of this action – i.e. increasing the number of qualified IT professionals (primarily programmers) – is related to the demands of the labour market.

Krzysztof Makles

Doktor nauk technicznych w dziedzinie informatyki.
Pracownik Wydziału Informatyki Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego w Szczecinie oraz V Liceum Ogólnokształcącego z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Adama Asnyka w Szczecinie.
Autor publikacji naukowych z zakresu optymalizacji systemów. Prywatnie producent muzyki elektronicznej i fan Star Treka.

Zmniejszanie różnic

Natalia Kędzierska

Komentarz do zmian w podstawie programowej nauczania matematyki w liceum

Po reformie edukacji w roku 2017/2018 pierwsze roczniki 4-letniego liceum oraz 5-letniego technikum będą musiały się zmierzyć nie tylko z wydłużeniem okresu nauki w szkole średniej, lecz przede wszystkim ze zmianami w podstawach programowych poszczególnych przedmiotów – również w zakresie matematyki. W nowej podstawie programowej zdecydowanie szerzej zostały opisane cele kształcenia. W punkcie IV, dotyczącym rozumowania i argumentacji, zaznaczono między innymi odróżnianie dowodu od przykładu oraz stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytu-

acjach nietypowych. Pierwsza zmiana jest bardzo istotna z punktu widzenia rozwoju dedukcji matematycznej oraz myślenia abstrakcyjnego. Druga natomiast nie sprowadza rozwiązywania zadań tylko do wyuczonych schematów, lecz ćwiczy dostosowywanie konkretnych narzędzi do rozwiązania danego problemu. Widoczne są również zmiany w treściach nauczania – większość zagadnień została opisana bardziej szczegółowo. Ponadto dużą część tematyki z zakresu rozszerzonego przeniesiono do poziomu podstawowego. Tym samym poziom trudności egzaminu maturalnego na poziomie podstawowym wzrośnie.

Liczby rzeczywiste

Do poziomu podstawowego zostały przeniesione lub dodane następujące treści:

- wzór na logarytm potęgi,
- stosowanie interpretacji geometrycznej i algebraicznej wartości bezwzględnej,
- rozwiązywanie równań i nierówności z wartością bezwzględną,
- przeprowadzanie prostych dowodów dotyczących podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia,
- stosowanie własności monotoniczności potęgowania.

Ponadto na poziomie podstawowym, zamiast przedstawiania liczb rzeczywistej w różnych postaciach i obliczania wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych), pojawiły się zagadnienia dotyczące wykonywania działań (dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, potęgowania, pierwiastkowania, logarytmowania) w zbiorze liczb rzeczywistych.

Przeniesienie zagadnienia wartości bezwzględnej z poziomu rozszerzonego do podstawowego jest zasadne. Uczniowie wykorzystują je w wielu zadaniach, często intuicyjnie. Ponadto znajomość równań z wartością bezwzględną powinna przyczynić się do niwelowania błędów przy rozwiązywaniu niektórych równań kwadratowych, na przykład $(a - 5)^2 = 16$, gdyż łatwo będzie można z niego przejść do równania równoważnego $|a - 5| = 4$, skąd uczniowie odczytują już dwa rozwiązania (9, 1), a nie mylnie jedno (9).

Wykonywanie działań w zbiorze liczb rzeczywistych zamiast obliczania wyrażeń arytmetycznych wymiennych dodaje do obecnych zadań również działania na liczbach niewymiernych, na przykład: $\frac{1}{\sqrt{2}} + 5\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{7} \sqrt[2]{3} - 3 + \frac{7}{\sqrt{5}}$.

Wprowadzenie monotoniczności potęgowania rozszerza zakres podstawowy o zadania typu: rozwiąż nierówność $2^{x+1} < 4^{3-x}$, gdzie uczniowie wykorzystują wcześniej wspomnianą własność lub dowodzenie prostych nierówności $3^{x^2} \geq 3^{2x-1}$

dla każdego x rzeczywistego. Punkt ten nie jest sprecyzowany w przeciwieństwie do treści dotyczących wartości bezwzględnej, gdzie podano przykłady trudności zadań.

Ciekawym pomysłem jest dodanie prostych dowodów matematycznych, nie trudniejszych niż dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych lub dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2. Zmiana ta pozwala na wprowadzenie ucznia w narzędzia dowodzenia, ale bez wykorzystania geometrii, której opanowanie stwarza problemy.

Wyrażenia algebraiczne

Do poziomu podstawowego zostały przeniesione lub dodane następujące treści:

- stosowanie wzorów na $a^3 - b^3$ oraz $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^n - b^n$,
- dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów jednej i wielu zmiennych,
- dodawanie i odejmowanie, mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiennych,
- rozkładanie wielomianu na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika lub grupowania wyrazów,
- dzielenie wielomianu przez dwumian $x - a$,
- znajdowanie pierwiastków całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych,
- dodawanie i odejmowanie, mnożenie wielomianu jednej i wielu zmiennych, wyłączanie poza nawias jednomianu z sumy algebraicznej.

Treści dodane do poziomu rozszerzonego:

- znajdowanie pierwiastków całkowitych i wymiennych wielomianu o współczynnikach całkowitych,
- stosowanie podstawowych własności trójkąta Pascala oraz własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona),
- korzystanie ze wzorów na $(a + b)^n$ i $(a - b)^n$.

Przeniesienie podstawowych operacji na wielomianach i wyrażeniach algebraicznych pokazuje stosowanie ich nie tylko na funkcjach kwadratowych czy prostych wielomianach jednej zmiennej trzeciego stopnia. Podstawy uczniowie opanowują już w 7 i 8 klasie szkoły podstawowej, więc na etapie liceum jest to tylko uzupełnienie i nieznaczne rozszerzenie zdobytej wiedzy. Dużą zmianą natomiast jest przeniesienie wzorów na sześciang sumy (różnicy) i różnicę sześciangów do poziomu podstawowego. Uczniowie często popełniają błędy przy podnoszeniu wyrażenia do trzeciej potęgi, wymyślając niepoprawny wzór. Ponadto dodanie wzoru na $a^n - b^n$ obrazuje uczniom istnienie tego typu wzorów nie tylko dla $n = 2$ lub $n = 3$. Na poziomie rozszerzonym natomiast dodano zadania na dowodzenie podzielności z wykorzystaniem powyższego wzoru. Uczniowie na tym poziomie zdobędą również wiedzę na temat trójkąta Pascala, dzięki czemu łatwiej zapamiętają wzory na $(a + b)^n$ i $(a - b)^n$, oraz poznają własności symbolu Newtona, korelacje wzorów skróconego mnożenia z kombinatoryką.

Warto również podkreślić, że dzielenie wielomianu przez dwumian $ax + b$ z zakresu rozszerzonego zostało zmienione na dzielenie wielomianu przez dwumian $x - a$, ale przeniesione do poziomu podstawowego.

Ponadto zaleca się przeprowadzenie dowodu (również na poziomie podstawowym) algorytmu Hornera. Jest on zdecydowanie szybszy niż żmudne wykonywanie dzielenia wielomianu, co miało miejsce do tej pory. Ponadto schemat Hornera znajduje zastosowanie w informatyce.

Równania i nierówności

Do poziomu podstawowego zostały przeniesione lub dodane następujące treści:

- rozwiązywanie równania wielomianowego sprowadzalnego do równań kwadratowych w szczególności równań dwukwadratowych,

- rozwiązywanie równań wymiernych $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie $V(x)$ i $W(x)$ zapisane są w postaci iloczynowej, zamiast rozwiązywania prostych równań wymiernych sprowadzalnych do równań liniowych lub kwadratowych.

Zmiany w zakresie rozszerzonym obejmują:

- wzory Viète'a dla równań kwadratowych,
- rozwiązywanie nierówności wielomianowych typu $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Zmiana w typie równań wymiernych na poziomie podstawowym jest z pozoru niezauważalna. To jednak duże ułatwienie dla uczniów, gdyż wielomiany $V(x)$ oraz $W(x)$ nie wymagają znalezienia ich miejsc zerowych bądź postaci iloczynowej (są w tej postaci podane), czyli znacznie upraszczają rozwiązanie zadania. Sprawdzają natomiast, czy uczeń pamięta o wyznaczeniu dziedziny równania oraz czy zna metodę rozwiązania równania wymiernego. Podobnie na poziomie rozszerzonym – uczeń, rozwiązując nierówność $W(x) > 0$, gdzie wielomian W jest przedstawiony w postaci iloczynowej lub w łatwy sposób do niej sprowadzalny, dostaje sugestię, żeby korzystać z owej postaci w celu wyznaczenia miejsc zerowych wielomianu. W szczególności po to, aby nierówności kwadratowe postaci $(x - 4)(x + 2) > 0$ były rozwiązywane bez użycia wyróżnika trójmianu kwadratowego, co nie jest błędem, ale niepotrzebną stratą czasu podczas egzaminu maturalnego. Ponadto nie wymaga się od ucznia przy rozwiązywaniu nierówności wielomianowych stosowania twierdzenia o znajdowaniu pierwiastków całkowitych i wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych. Istotne zdaje się pytanie: czy rozwiązanie nierówności typu $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 < 0$ będzie wymagane od ucznia? Można je przedstawić metodą grupowania w postaci iloczynowej, lecz łatwiejszym rozwiąza-

niem dla ucznia będzie skorzystanie z powyższego twierdzenia i schematu Hornera. Warto zauważyć, że wzory Viète’a na poziomie rozszerzonym zostały sprecyzowane tylko do funkcji kwadratowych, a nie na przykład trzeciego stopnia.

Funkcje

Do poziomu podstawowego zostały przeniesione treści dotyczące:

- funkcji określonej różnymi wzorami na różnych przedziałach,
- funkcji logarytmicznej.

Zmiany na poziomie rozszerzonym obejmują następujące treści:

- złożenia funkcji,
- dowodzenie monotoniczności funkcji zadanej wzorem, jak w przykładzie: wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ jest monotoniczna w przedziale $(-\infty, -2)$,
- usunięcie szkicowania wykresu funkcji $cf(x)$ oraz $f(cx)$.

Wprowadzenie do podstawy złożenia funkcji znacznie rozszerzy klasę funkcji przy badaniu jej własności na przykład o funkcję określoną wzorem $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3x}}$. Zmiana ta pozytywnie wpłynie na kolejny etap edukacji ucznia, gdyż złożenie funkcji przysparza trudności studentom. Przeniesienie funkcji logarytmicznej do poziomu podstawowego ułatwi korelację z takimi przedmiotami, jak fizyka, biologia czy chemia. Usunięcie wykresu funkcji $cf(x)$ i $f(cx)$ utrudnia rozwiązanie metodą graficzną równań i nierówności trygonometrycznych, na przykład $\sin(cx) < a$, czy szkicowanie wykresów funkcji $c \cdot 2^x$.

Ciągi

Do poziomu podstawowego zostały dodane poniższe treści:

- ciągi opisane rekurencyjnie,
- badanie, czy ciąg maleje, czy rośnie,

- zadania osadzone w kontekście praktycznym. Do poziomu rozszerzonego dodano:
- twierdzenie o trzech ciągach,
- obliczanie granic ciągów z wykorzystaniem granicy ciągu $\sqrt[n]{a}$.

Pomocny staje się tu komentarz dotyczący działu opisany w warunkach i sposobach realizacji: „Zagadnienie to należy omawiać tak, by uczniowie zdali sobie sprawę, że poza ciągami arytmetycznymi i geometrycznymi istnieją też inne. Podobnie należy podkreślić, że poza ciągami niemalejącymi, rosnącymi, nierosnącymi, malejącymi i stałymi istnieją też takie, które nie są monotoniczne. Warto zwrócić uwagę uczniów, że niektóre ciągi opisują dynamikę procesów występujących w przyrodzie bądź społeczeństwie. Przykładowo podany w dziale VI pkt 2 lit. a ciąg opisuje szybkość rozprzestrzeniania się plotki (liczba a_n podaje, ile osób o plotce słyszało). Podobny model może być użyty do opisu rozprzestrzeniania się epidemii. *Granica ciągu*. Przed sformułowaniem definicji granicy ciągu warto zadawać uczniom pytania w rodzaju: czy istnieje taka liczba naturalna k , że dla każdej liczby naturalnej n większej od k zachodzi nierówność $\frac{1}{3} < \frac{n}{2n+1} < \frac{2}{3}$? Twierdzenie o trzech ciągach także wspiera budowanie intuicji granicy ciągu. Obliczanie granic ciągów warto poprzedzić wykorzystaniem programów komputerowych do rysowania wykresów ciągów. Dokładniejsze obliczenia ułatwią w odpowiednio dobranych przykładach formułowanie hipotez na temat istnienia wartości granicy ciągu”.

Trygonometria

Do poziomu podstawowego dodane zostały następujące treści:

- wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ,
- stosowanie twierdzenia sinusów i cosinusów,
- znajdowanie przybliżonej wartości kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej.

Zmiany na poziomie rozszerzonym obejmują:

- przeniesienie wzorów redukcyjnych,
- usunięcie wzorów na sumę i różnicę sinusów i cosinusów,
- dodanie wzorów na tangens sumy i różnicy oraz funkcje podwojonego kąta,
- rodzaje równań i nierówności trygonometrycznych.

Podobnie jak w poprzednich działach większe zmiany obejmują poziom podstawowy. Trójkąty prostokątne o kątach 30° , 45° , 60° pojawiają się już w 7 klasie szkoły podstawowej, więc na tym etapie edukacyjnym są jedynie kontynuacją. Znajdowanie przybliżonej wartości kąta jest zadaniem banalnym dla uczniów, ale pozwala zrozumieć im, że funkcje trygonometryczne nie są określone tylko dla kątów w trójkącie prostokątnym, lecz w ogólności. Istotną zmianą jest wprowadzenie do poziomu podstawowego twierdzenia sinusów i cosinusów. Uczniowie – nie tylko na poziomie rozszerzonym – poznając twierdzenie cosinusów, powinni zrozumieć, że twierdzenie Pitagorasa jest jego szczególnym przypadkiem.

Ponadto zadania na poziomie podstawowym nie będą sprowadzały się już tylko do zastosowania twierdzenia Pitagorasa lub podobieństwa trójkątów, czyli wiedzy nabytej w poprzednim etapie edukacyjnym. Dodanie do poziomu rozszerzonego wzoru na tangens sumy bądź różnicy nie jest czymś nowym, uczniowie znali bowiem zależność pomiędzy tangensem a sinusem i cosinusem, zatem tego typu zależności również były im znane. Zamiana wzorów na sumę sinusów i cosinusów wzorami na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta zubaża poziom rozszerzony o zadania typu $\sin(5x) + \sin(7x) = 1$, czy $\sin(x) + \cos(x) = 1$. Zmiana rodzajów równań i nierówności trygonometrycznych jest następstwem wprowadzenia powyższych zmian oraz usunięcia z działu funkcji przekształceń $cf(x)$ oraz $f(cx)$. Nie powinno się rozważać rozwiązywania zadań typu $\sin(3x) < 0,5$ metodą graficzną, gdyż uczniowie nie

znają zależności pomiędzy wykresami funkcji $\sin(x)$ a $\sin(3x)$.

Planimetria

Poziom rozszerzony od podstawowego różni się tylko jednym zagadnieniem dotyczącym własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu. Uczeń na poziomie podstawowym powinien znać twierdzenie Talesa, jak i twierdzenie do niego odwrotne, o dwusiecznej kąta, kącie między styczną a cięciwą. Przeniesienie większości treści do poziomu podstawowego jest skutkiem przeniesienia twierdzenia sinusów i cosinusów do poziomu podstawowego.

Pomimo bardzo małej różnicy w treściach programowych między poziomem podstawowym a rozszerzonym, owe różnice powinny występować w trudności omawianych zadań. Uczeń na poziomie podstawowym powinien ponadto przeprowadzać dowody geometryczne, zapoznać się z dowodami twierdzenia o kątach w okręgu, o odcinkach w trójkącie prostokątnym, o dwusiecznej, wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha$ twierdzenia sinusów i cosinusów oraz odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa. Natomiast na poziomie rozszerzonym z dowodami twierdzeń o istnieniu punktów szczególnych trójkąta, o czworokącie wpisanym w okrąg oraz opisanym na okręgu. Celem jest poznanie przez uczniów poprawnych metod dowodzenia oraz doskonalenie umiejętności argumentacji, która przysparzała do tej pory nawet bardzo dobrym uczniom wielu trudności. Z pewnością będzie to jedna z poważniejszych zmian w podstawie programowej. Dowodzenie prostych własności geometrycznych zostało co prawda wprowadzone w klasie 8 szkoły podstawowej, lecz w dalszym ciągu, dla wielu z nich, jest to znaczna trudność.

Geometria analityczna

Przeniesione do poziomu podstawowego zostały następujące treści:

- pojęcie równania okręgu,
- odległość punktu od prostej,
- znajdowanie punktów wspólnych prostej i okręgu, a także prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej,
- wyznaczanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do danej zadanej w postaci ogólnej, stycznej do okręgu.

Sztuczny podział występujący w poprzedniej podstawie programowej, dotyczący rozdzielenia funkcji liniowej opisanej w postaci kierunkowej lub ogólnej, został zniesiony. Rzeczywiście, uczniom nie stwarzało problemu przechodzenie z jednej postaci do drugiej, nie było też dużej różnicy pomiędzy na przykład zadaniem z poziomu podstawowego: wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = 2x + 1$ i przechodzącej przez punkt $(2, 4)$, a zadaniem z poziomu rozszerzonego: wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej $2x - y + 1 = 0$ i przechodzącej przez punkt $(2, 4)$. Przeniesienie takich tematów, jak równanie okręgu, znajdowanie punktów wspólnych prostej i okręgu, a także prostej i paraboli do poziomu podstawowego, znacznie rozszerza poziom trudności dotychczas omawianych zadań. Pozostają one jednak w zasięgu przeciętnego ucznia, gdyż są to zadania w dużej mierze schematyczne, niewymagające umiejętności twórczych przy ich rozwiązywaniu. Jest to także naturalne rozszerzenie poznanego materiału.

Stereometria

Do poziomu podstawowego dodane zostały tematy takie, jak:

- rozpoznawanie wzajemnego położenia prostych w przestrzeni, w szczególności prostych prostopadłych nieprzecinających się,
- posługiwanie się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami,

- obliczanie objętości oraz pól powierzchni walca, stożka i kuli, również z użyciem trygonometrii,
- wykorzystanie zależności pomiędzy objętościami brył podobnych.

Na poziomie rozszerzonym zmiany dotyczą:

- przekrojów brył,
- wprowadzenia twierdzenia o prostej prostopadłej do płaszczyzny i o trzech prostopadłych.

Poziom podstawowy został rozszerzony nieznacznie pod względem obszerności materiału, ale bardzo istotnie pod kątem wprowadzenia do działu stereometrii. Dodanie podstawowych pojęć, takich jak kąt między prostą a płaszczyzną, kąt dwuścienny oraz między półpłaszczyznami, pozwala usystematyzować wiedzę uczniów już na samym początku ich przygody ze stereometrią. Wymuszenie poniekąd sposobu wprowadzania pojęć, ułatwia uczniom tworzenie poprawnych rysunków do bardziej skomplikowanych zadań, kluczowych do ich poprawnego rozwiązania. Tematy dotyczące walca, stożka czy kuli są tematami występującymi wcześniej na poziomie gimnazjum, a nieujętymi w programach klas 7 i 8 szkoły podstawowej.

Zmiany na poziomie rozszerzonym obejmują wprowadzenie twierdzeń wraz z dowodami o prostej prostopadłej do płaszczyzny oraz o trzech prostopadłych oraz zmianę w zakresie wyznaczania przekrojów brył. Wcześniej uczeń określał, jaką figurą jest dany przekrój płaszczyzną graniastosłupa lub ostrosłupa, obecnie temat ten został zawężony do przekrojów płaszczyzną sześcianu i ostrosłupów prawidłowych. Zagadnienie to, podobnie jak wiele innych, zostało doprecyzowane. Większość zadań wprowadziła i tak dotyczyła ostrosłupów prawidłowych, a nie dowolnych, natomiast ułatwieniem dla ucznia jest ograniczenie przekroju dowolnego graniastosłupa tylko do sześcianu bądź prostopadłościanu. Tematyka powyższego działu kształtuje u uczniów przede wszystkim wyobraźnię przestrzenną.

Kombinatoryka, rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Poziom podstawowy został rozszerzony o następujące treści:

- obliczanie średniej arytmetycznej, mediany i dominanty,
 - obliczanie wartości oczekiwanej,
 - stosowanie skali centylowej.
- Do poziomu rozszerzonego dodano:
- stosowanie współczynnika dwumianowego Newtona i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych,
 - stosowanie schematu Bernoulliego.

Schemat Bernoulliego rozszerza tematy prawdopodobieństwa o zadania dotyczące nie jednego, dwóch, trzech rzutów kostką czy monetą, lecz o ciąg n niezależnych powtórzeń. W tym miejscu warto zwrócić uczniom uwagę na paradoksy związane ze schematem Bernoulliego, takie jak złudzenie Monte Carlo czy paradoks hazardzisty.

Równie ciekawym tematem jest dodanie do poziomu podstawowego wartości oczekiwanej, pozwalającej obliczyć wynik doświadczenia losowego. W banalny sposób można obliczyć na przykład, czy dana gra ma wartość oczekiwaną ujemną, a tym samym jest dla gracza niekorzystna. Świadomość uczniów na temat opłacalności niektórych gier może ustrzec ich w dorosłym życiu przed popełnieniem poważnych błędów.

Optymalizacja i rachunek różniczkowy

Zmiany na poziomie podstawowym obejmują jedynie doprecyzowanie punktu dotyczącego rozwiązywania zadań optymalizacyjnych w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową. Zmiany na poziomie rozszerzonym to:

- dodanie własności Darboux,
- wzbogacenie obliczania pochodnej funkcji o pochodną funkcji potęgowej i funkcji złożonej.

Wprowadzenie do poziomu podstawowego zadań optymalizacyjnych dających się opisać funkcją

kwadratową nie jest nowością dla ucznia – tego typu zadania pojawiały się na poziomie podstawowym, jednak brakowało w podstawie programowej jednoznaczego zapisu, jakiego typu zadań on dotyczy. Wzbogacenie poziomu rozszerzonego o pochodną funkcji złożenia jest konsekwencją wprowadzenia złożenia funkcji, w związku z tym rozszerzona została klasa funkcji, dla których badamy ich ekstrema, monotoniczność czy rozwiązujemy zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej. Własność Darboux jest czymś bardzo intuicyjnym dla uczniów, nie powinno zatem stanowić większego problemu jej omawianie. Pozwala ona w prosty sposób znaleźć przybliżoną wartość miejsca zerowego oraz uzasadnić fakt jego istnienia. Uznawając uczniom, że nie zawsze wszystkie dane muszą być podane wprost, mogą być przybliżone.

Zmiana podstawy programowej, zwłaszcza na poziomie podstawowym, jest bardzo zauważalna. Uczniowie będą musieli poświęcić więcej czasu na zrozumienie treści, odpowiednie argumentowanie, dobieranie trafnych metod, a nie na schematyczne rozwiązywanie zadań.

Zmniejszenie różnic występujących pomiędzy poziomem podstawowym a rozszerzonym ułatwi uczniom realizującym matematykę na poziomie podstawowym studia na kierunkach technicznych, gdzie wymagana jest umiejętność logicznego myślenia oraz opanowanie technik matematycznych pozwalających swobodnie rozszerzyć wiedzę zdobytą we wcześniejszych etapach edukacyjnych.

Budzi moją wątpliwość, czy przy tak dużym rozszerzeniu treści programowych, ale jednocześnie małej zmianie w nowym rozkładzie liczby godzin ($3 + 4 + 3 + 4$), uczniowie w wystarczającym stopniu opanują materiał z matematyki.

Natalia Kędzierska

Nauczycielka matematyki w V Liceum Ogólnokształcącym z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Adama Asnyka w Szczecinie.

Jak uczyć matematyki?

Nikoła Budnicka

Rozważania z perspektywy różnych etapów edukacyjnych

Matematyka – dla jednych królowa nauk, dla innych senny koszmar, a dla mnie – od zawsze najłatwiejszy przedmiot szkolny, jedyny, którego nigdy nie musiałam się obawiać. Wszystko w matematyce, od początku do końca, było dla mnie jasne, logiczne i zrozumiałe. Każde trudniejsze zadanie traktowałam jak zagadkę lub rozrywkę umysłową – uczenie się matematyki było po prostu moją pasją, a nie byłam i nie jestem matematycznym geniuszem. Ta pasja i hobby zaprowadziły mnie na studia matematyczne i były to dla mnie najpiękniejsze lata – mogłam wtedy robić to, co naprawdę lubiałam. Dlaczego o tym piszę? Bo uważam to za jedną z podstawowych cech, które powinien posiadać każdy nauczyciel – pasję i zainteresowanie własnym przedmiotem, inaczej będzie niewiarygodny w oczach uczniów. Tylko wielbiciel przedmiotu – w tym wypadku matematyki – może wzbudzić zainteresowanie, a nawet zamiłowanie do jego nauki, zaciekać nim do końca życia.

Matematyka (nie zawsze) dla wszystkich

Współczesna szkoła, wpisana w ramy systemu państwowego, ma duże oczekiwania w stosunku do uczniów: mają być grzeczni, zainteresowani wszystkimi omawianymi na lekcjach tematami, uczyć się pilnie, odrabiać prace domowe, zdawać dobrze egzaminy... I tak w ramach każdego przedmiotu. No cóż – logika podpowiada, że to po prostu niemożliwe. Nigdy nie będzie tak, że dziecko w jednakowy sposób zainteresuje się wszystkimi dziedzinami. Bardzo dobrze, że ktoś ma talent muzyczny, ktoś inny – plastyczny, humanistyczny czy matematyczny. Rolą zaś nauczycieli jest pomoc w odkryciu tego talentu i rozwijanie go. Kolejna reforma szkolnictwa, bez zmian w tym zakresie, proponuje uczniowi te same programy i egzaminy – tyle że w nowej oprawie. Kiedy w końcu system zacznie zauważać młodego człowieka i da mu szansę nauki poszczególnych przedmiotów na

różnych poziomach, wedle swoich zainteresowań i możliwości?

Przez wiele lat mojej pracy w szkole uczyłam matematyki prawie na wszystkich etapach edukacji. Największym wyzwaniem dla mnie była praca z najmłodszymi – uczniami pierwszej klasy szkoły podstawowej. Praca z dziećmi jest bardzo wymagająca, ale jednocześnie daje najwięcej satysfakcji. Naprawdę trzeba je zaciekawić i skłonić do wysiłku umysłowego. Już na tym wczesnym etapie edukacji widać, jakim nieporozumieniem jest program nauczania jednakowy dla wszystkich. Niektóre dzieci potrzebują więcej czasu na przyswojenie pojęcia cyfry i liczby, a niektóre muszą udawać, że nie słyszały o liczbie 100! Uczeń uzdolniony matematycznie nudzi się na lekcji, a dziecko, które jeszcze nie dojrzało do pojęć matematycznych, ma poczucie porażki i niepowodzenia. Nawet bardzo dobry i doświadczony nauczyciel, mimo starań i indywidualizacji nauczania, nie jest w stanie tego pogodzić.

Co będziemy dzisiaj robić?

Ponieważ w mojej szkole, dzięki wsparciu dyrektora, powstała klasa matematyczna, prowadziłam w niej dodatkowe lekcje. Nie były to zajęcia dla chętnych, ale dla całej klasy, mogłam jednak sobie pozwolić na dowolność tematów i sposobu prowadzenia lekcji. Najbardziej zależało mi na tym, żeby wszyscy mieli szansę osiągnąć sukces i żeby chętnie brali aktywny udział. Nie chciałam korzystać z gotowych kart pracy i zadań z podręcznika – ostatecznie mieliśmy tylko do wyboru liczenie do 10. Przez cały semestr rozwiązywaliśmy labirynty, wypełnialiśmy kwadraty magiczne, graliśmy w gry logiczne, układaliśmy sześciennie puzzle i tangramy. Dzieciaki naprawdę na mnie czekały i od razu pytały: „A co będziemy dzisiaj robić?”. Oczywiście najatrakcyjniejsze były gry. Dzięki nim uczniowie nie myśleli o matematyce jak

o trudnym i nudnym przedmiocie, każdy miał szansę spróbować swoich sił w rozwiązywaniu łamigłówek i odnieść sukces z osiągniętego celu czy wygranej. Rozwijaliśmy wyobraźnię przestrzenną, umiejętność logicznego myślenia, a najmniej liczyliśmy w powszechnym tego słowa rozumieniu.

W nauce matematyki bardzo ważna jest motywacja. Wyobraźmy sobie sytuację, w której nasz szef daje nam zadanie, ale nie umiemy tego zadania wykonać. I tak codziennie... No cóż, ja najpierw bym próbowała się nauczyć, potem zmieniałabym pracę. Co może uczeń? Próbuje, próbuje, uczy się, bierze korepetycje... Oczywiście może zmienić szkołę, nauczyciela, ale i tak trafi na ten sam program i te same problemy. Motywacja ucznia gwałtownie spada – do tego stopnia, że przestaje robić nawet najprostsze zadania. I w takim stanie trafia na wyższy etap edukacji.

Na głęboką wodę

W mojej karierze zawodowej zdarzyło mi się uczyć bardzo słabą klasę licealną, w której najtrudniej było skłonić uczniów do podejmowania jakiegokolwiek wysiłku. Byli grzeczni na lekcjach, niemal się nie odzywali, mieli jednak bardzo niską samoocenę, a matematykę traktowali jak czarną magię – groźną i niebezpieczną. Nawet najłatwiejsze zadanie uznawali za „nie-do-zrobienia”. Przez lata nauki utrwaliли sobie, że matematyka jest bardzo trudna i nie warto się wysilać, bo i tak nic to nie da. Ja zaś, kierując się słowami mojego dawnego profesora: „Jeśli nie wejdiesz do wody, to się pływać nie nauczysz! Wy jeszcze w szatni siedzicie!”, powoli, mozolnie wyprowadzałam moich licealistów z szatni na brzeg basenu i razem próbowaliśmy wejść do wody. Nie wszyscy zdali maturę, ale mam nadzieję, że chociaż trochę zrozumieli, że trzeba podejmować wysiłek, próbować zmierzyć się z trud-

nościami różnymi sposobami, a niepowodzenie traktować jako doświadczenie, a nie porażkę.

Współczesna szkoła musi brać pod uwagę zdolności i możliwości ucznia, a matematyki powinno się uczyć na poziomach zaawansowania według indywidualnych zdolności. Podstawa programowa powinna zawierać tylko ogólne wytyczne, zaś to nauczyciel musi mieć możliwość wyboru tematów i zagadnień, które chciałby z daną grupą rozwijać. Przy dzisiejszym rozkładzie godzin nie ma czasu na dodatkowe tematy czy atrakcyjne gry logiczne, a to jest podstawa w rozwijaniu zainteresowań matematycznych uczniów.

Niedawno uczeń klasy ósmej zadał mi pytanie, czy znam algebrę Boole'a i czy mogę coś o niej opowiedzieć, bo potrzebuje wiedzy na konkurs informatyczny. Poczułam się, jakbym wygrała los na loterii, wreszcie coś innego! No i mój uczeń (wcale nie „piątkowy”) zadał pytanie! A przecież o to chodzi w nauczaniu, żeby uczeń próbował, poszukiwał, zadawał pytania, a nie odwrotnie. Bardzo chciałabym częściej zajmować się na lekcjach problemami, które wychodzą od moich uczniów. Dzięki temu znowu poczułam dreszczyk emocji – mogę opowiedzieć o czymś nieelementarnym, nowym i ciekawym.

Bardzo tego potrzebujemy, my nauczyciele – odrobiny odmiany, a nie tkwienia w stałych schematach, które są wprawdzie bezpieczne, ale strasznie nudne. Rozwój jest przecież możliwy tylko wtedy, gdy wychodzimy ze swojej strefy komfortu. Uczniowie też tego potrzebują, bowiem chcieliby mieć wpływ na to, czego się uczą, rozwijać swoje pasje i zainteresowania. Mam nadzieję, że w „szkole przyszłości” to nauczyciel będzie zaskakiwany pytaniami.

Średni przetrwają

Matematyka – królowa nauk – jest ciekawa i piękna. Wszystko w niej jest wytłumaczalne,

logiczne i spójne. Jednak nie każdy uczeń to zobaczy i to też jest dobre. Nauczmy się cenić indywidualności i pasje. Świat byłby nudny, gdyby wszyscy jednakowo lubili i umieli to samo. Taki stan rzeczy nie ma odzwierciedlenia w rzeczywistości. Uczmy dzieci, że każdy ma swój talent i nic w tym złego, że ktoś jest dobry z historii, a ktoś inny z WF-u. Pozwólmy pasjonatom informatyki zgłębiać matematykę w trochę innym kierunku, a humanistom, biologom, artystom dajmy możliwość osiągnięcia sukcesu na tych trudnych dla nich lekcjach. Najważniejsze dla nas powinno być to, aby uczeń podejmował wysiłek umysłowy, „wchodził do wody”, zadawał pytania i chciał się uczyć.

Miało być o nowoczesnym nauczaniu matematyki, a tu nie ma nic o odkrywczym metodach czy wykorzystaniu nowoczesnych technik. Dzisiaj większość nauczycieli matematyki próbuje metod aktywizujących na lekcjach, w wielu szkołach są tablice multimedialne, tablety, kalkulatory graficzne. Wszystko to jest potrzebne, ale moim zdaniem u podstaw leży całkowita zmiana systemu edukacji. Dopóki podstawa programowa będzie tak przeładowana, a lekcje będą się odbywać w obecnym modelu nauczania, nic się nie zmieni. Uczeń zdolny będzie się nudził, w najgorszym wypadku przestanie się rozwijać, uczeń słaby będzie miał ciągłe poczucie porażki i niepowodzenia, a co za tym idzie niską samoocenę. Tylko ten średni, dodatkowo cechujący się postawą konformistyczną, przetrwa bez kłopotu.

Nikola Budnicka

Nauczycielka matematyki w Szkole Podstawowej nr 47 im. Kornela Makuszyńskiego w Szczecinie.

Wbrew intuicji

Beata Misiak

O pożytkach z niestandardowych metod nauczania matematyki

Centralna Komisja Egzaminacyjna zaleca nauczycielom matematyki w szkołach ponadpodstawowych omawianie na zajęciach poświęconych rachunkowi prawdopodobieństwa różnych paradoksów. W materiałach dla nauczycieli matematyki – zebranych w *Vademecum Nauczyciela ORE*, ale i w ćwiczeniach maturalnych przygotowanych przez CKE – znajdziemy zadanie związane z paradoksem Monty’ego Halla. Jest to znany, na przykład z teleturnieju „Idź na całość” (tytuł oryginału: „Let’s Make a Deal”), problem wyboru spośród trojga drzwi tych, za którymi ukryto nagrodę.

Uczestnik staje przed trzema zakrytymi bramkami: w jednej z nich znajduje się nagroda (samochód), w dwóch maskotka kota o imieniu Zonk. Po wybraniu bramki przez gracza prowadzący ujawnia jedną z pozostałych bramek, okupowaną przez Zonka, i zadaje pytanie graczowi, czy zmienia swój wybór. Jaka odpowiedź najczęściej pada? Oczywiście: nie!

Zagadka, czy lepiej jest zmienić wybór, ma rozwiązanie całkowicie sprzeczne z intuicją – zawsze lepiej jest zmienić! Można to udowodnić matematycznie, korzystając z prawdopodobieństwa warunkowego, jak i empirycznie (pozwalać ludziom zagrać setki razy). Szansa na wybór bramki z samochodem to $1/3$, ale z prawdopodobieństwem $2/3$ wybierasz bramkę z kotem. Zatem lepiej zmienić swoją decyzję, bo szansa na wygraną wzrośnie dwukrotnie (w porównaniu z pozostaniem przy pierwszym wyborze). Zaskakujące jest to, że nawet posiadana wiedza i doświadczenie nie skłaniają uczestników gry do zmiany decyzji.

Lepiej od ludzi wypadają w tym teście zwierzęta. Badacze przeprowadzili 30-dniowy eksperyment z udziałem gołębi, które dziobały w świecące się guziki. Wybór guzika (czyli bramki) mógł zakończyć się w przypadku wygranej otrzymaniem smakołyka. Dodatkowa informacja o braku smakołyka oznaczona była brakiem światelka. Gołębie

po 30 dniach treningu nauczyły się zmieniać swój pierwotny wybór, po wygaszeniu guzika, i robiły to w 96% prób.

Nauczycielska intuicja również okazuje się często zawodna w zakresie doboru strategii nauczania. W programach nauczania matematyki treści podzielone są na działy, bloki tematyczne (obejmujące pojęcia nadrzędne) oraz związane z nimi treści szczegółowe i umiejętności. Uczymy zatem blokami według schematu $X_1 X_2 X_3 Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$. Tymczasem badania przeprowadzone przez neurobiologów wskazują, że o wiele bardziej efektywne jest uczenie się przeplatane, czyli na przykład ułożenie treści w następujący sposób – $X_1 Y_1 Z_1 Y_2 Z_2 X_2 Z_3 X_3 Y_3 Z_4 Y_4$. Eksperymentem objęto uczniów kilku klas, którzy przez 9 tygodni powtarzali w różnych układach treści dotyczące równań liniowych, proporcji, układów równań i funkcji liniowej – część z nich powtarzana była blokowo, część w sposób przeplatany. Po dwóch tygodniach przeprowadzono niezapowiedziany test z wszystkich czterech tematów. Z treści powtarzanych blokowo uczniowie uzyskali 38% poprawnych odpowiedzi, a z treści powtarzanych w sposób przeplatany – 72%. Pokazuje to, że wbrew intuicji mocne zróżnicowanie i mieszanie małych porcji wiedzy jest skuteczniejsze w procesie uczenia się. Zatem optymalne dla ucznia jest „skakanie” po podręczniku, równoczesne realizowanie trzech, czterech działów, zamiast tak zwanego przerabiania materiału (temat po temacie, dział po dziale itp.).

Wbrew intuicji powinniśmy też oceniać naszych uczniów. Jakże trudno jest przejść od oceny wymaganej prawem oświatowym, i to w postaci noty, do pozytywnej informacji zwrotnej, która zdecydowanie bardziej sprzyja wyrabianiu pożądanых zachowań i motywuje do oczekiwanego działania. Zwierzęcy mechanizm ostrzegania innych członków stada przed grożącym niebezpieczeństwem sprawia, iż uczniowie słyszą od nas, że jeśli nie będą się uczyli, to nie skończą szkoły lub nie zdadzą matury, a jeśli nie odrobią pracy

domowej, to dostaną jedynkę. Tymczasem wpływ takich gróźb i ostrzeżeń jest bardzo ograniczony.

Wiele badań naukowych potwierdza tezę, że błyskawiczne nagrody są często skuteczniejsze niż przyszłe kary. Zachęcaniu do działania powinny towarzyszyć emocjonalne „marchewki”, czyli nagrody, pochwały, uznanie itp. Pozytywna informacja zwrotna i związane z nią przyjemne uczucia napędzają do powtarzania danego zachowania aż samoistnie przerodzi się ono w nawyk. Natomiast materialne i emocjonalne „kije” skutkują tendencją do unikania i dystansowania się. Zmiana zachowania wywołana przez strach jest krótkotrwała, a szansa utrwalenia go niewielka. Wszyscy – ludzie i zwierzęta – mamy skłonność do dążenia do przyjemności, do zbliżania się do osób lub zdarzeń mogących zapewnić nam coś dobrego, a unikania tego, co może nam zagrozić i sprawić ból. Nasze mózgi są tak skonstruowane, że przewidywana nagroda uruchamia mechanizm dążenia, zaś widmo kary aktywuje mechanizm unikania i hamowania.

Zatem jako nauczyciele powinniśmy mocno akcentować, co uczniowie mogą zrobić, aby poprawić poziom umiejętności, osiągnąć sukces – i tym samym zdobyć nagrodę. Pozwalajmy więc uczniom tworzyć kartkówki i je sprawdzać, projektować prace klasowe, wybierać zadania domowe do rozwiązania (liczbę i stopień trudności). Poczucie sprawczości, kontroli, możliwość wyboru zwiększają motywację i podatność na wpływy. Jeżeli dodatkowo rozsądnie nagrodzimy efekty, mamy szansę na osiągnięcie sukcesu dydaktycznego, wychowawczego i wzrost poczucia dobrostanu naszych uczniów i nas samych.

Beata Misiak

Nauczycielka konsultantka ds. nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w Zachodniopomorskim Centrum Doskonalenia Nauczycieli.

Matmoformatyka

Iwona Sobczak

Matematyka i informatyka jako jeden przedmiot?

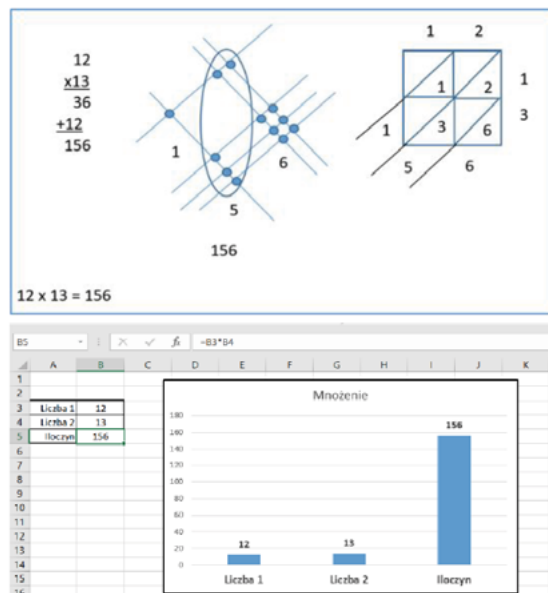
Jak połączyć szkolną matematykę z informatyką? Czy to w ogóle realistyczne? Oczywiście, że tak! Nie ma w tym nic dziwnego, choć wiele osób traktuje ten pomysł w kategoriach rewolucji. Zwróćmy jednak uwagę, że bez matematyki nie byłoby informatyki i gdyby przyjrzeć się temu bardzo dokładnie, odwrotność tego stwierdzenia również jest prawdziwa. Niektórzy sądzą, że informatyka jest przedmiotem łatwym. Zdecydowanie się z tym nie zgadzam. Informatyka jest jednym z najtrudniejszych ścisłych przedmiotów. To dziedzina, bez której nie potrafilibyśmy już dzisiaj funkcjonować, a tym bardziej niemożliwy by był jakikolwiek rozwój. Zakładam, że przedmiot ten w najbliższym czasie będzie miał inną nazwę. Być może tę, którą wymyśliłam – matmoformatyka. Do takiej koncepcji skłaniają mnie obserwowane na co dzień możliwości, jakie daje połączenie i zastosowanie matematyki na lekcjach informatyki. Zwiększają się one

znacznie, gdy nauczyciel informatyki jest także matematykiem.

Istotą tych dwóch przedmiotów są liczby, system dziesiętny i system dwójkowy. Jak wiadomo, każda informacja analizowana jest przez komputer w systemie dwójkowym. Istotny jest fakt, że współcześnie polegamy na systemie dziesiętnym: cokolwiek obliczamy i z któregośkolwiek programu komputerowego korzystamy. Ludzie widzą liczby z systemu dziesiętnego, ale nie widzą – w dosłownym słowa tego znaczeniu – jakie obliczenia i analizy przeprowadza komputer. Widzą za to efekty pracy swojej i „komputera”.

Realizując z dziećmi różne zagadnienia z zakresu informatyki, zawsze podkreślam: „zobaczcie, przecież to jest także matematyka”. Ktoś powie: dobrze, wiadomo, że lekcja z arkusza kalkulacyjnego to jednocześnie lekcja matematyki. Ja jednak idę dalej i realizuję zadania z matematyki na zajęciach z edytora tekstu lub edytora grafiki.

Przykład pierwszy:



Tego typu zadania można dostosować do różnych poziomów – ważne jest, by uczniowie znali już podstawy pracy w edytorze grafiki, edytorze tekstu i arkuszu kalkulacyjnym. W zadaniu występuje mnożenie za pomocą sposobu pisemnego, „sposób łódzki” przedstawiam po to, by pokazać, że nie należy się bać sposobu pisemnego i że można to działanie wykonać też inaczej. Najbardziej do gustu przypadł uczniom „sposób hinduski”. Kolejność wykonywanych kroków jest następująca: najpierw ćwiczenia i objaśnienia przy tablicy sposobem łódzkim, następnie sposobem hinduskim i sprawdzanie wyników sposobem pisemnym. W dalszej części lekcji uczniowie mnożą inne liczby w edytorze tekstu – tutaj muszą się wykazać umiejętnościami z informatyki, czyli wstawieniem kształtów, formatowaniem ich, wstawianiem pola tekstowego i jego formatowaniem. Następnie uczniowie wykonują obliczenia w arkuszu kalkulacyjnym, stosując odpowiednie formuły, a do tego, by uatrakcyjnić pracę, tworzą i formatują wykres. W zakresie informatyki muszą stworzyć dwa dokumenty (praca

w dwóch oknach), natomiast w zakresie matematyki – prawidłowo wykonać obliczenia.

Przykład drugi:

Lp.	Figura	Pole	Obwód
1.		$P = \frac{a \times h}{2}$	$O = a + b + c$

Stworzenie dokumentu tekstowego w MS Word, zawierającego tabelę z wzorami na pole i obwód sześciu figur płaskich. To zadanie idealnie komponuje się z treściami realizowanymi na matematyce w klasie siódmej. Zaznaczam, że treść zadania można dostosować także do innych poziomów. Z zakresu matematyki utrwalamy obliczanie pól i obwodów figur płaskich, natomiast z informatyki – wstawianie tabel, kształtów, równań.

W kierunkach polityki oświatowej państwa w roku szkolnym 2019/2020 zostało zapisane, na co powinniśmy kłaść nacisk, jeśli chodzi o matematykę i informatykę: „4. Rozwijanie kompetencji matematycznych uczniów. 5. Rozwijanie kreatywności, przedsiębiorczości i kompetencji cyfrowych uczniów, w tym bezpieczne i celowe wykorzystywanie technologii informacyjno-komunikacyjnych w realizacji podstawy programowej kształcenia ogólnego”. W odniesieniu do powyższych wskazań myślę, że łatwiej jest realizować treści matematyczne na przykład na lekcjach informatyki – zwłaszcza w dobie szybkiego tempa rozwoju technologii informatycznych. Z doświadczenia wiem, że matematyką – jako odrębną dziedziną – zainteresowanych jest niewielu uczniów, ale matematyka realizowana na informatyce wywołuje duże zaciekanie.

Iwona Sobczak

Nauczycielka informatyki w Szkole Podstawowej
im. Kornela Makuszyńskiego w Kaliszu Pomorskim.

Zielona matematyka

Marta Król

O skutecznej nauce poprzez gry i zabawy w środowisku naturalnym

A może by tak wziąć czarodziejską różdżkę i odczarować wszystkie negatywne wspomnienia związane z nauką matematyki, które tkwią w naszych głowach? My, dorośli, wiemy, że to niemożliwe. Wspomnienia bowiem – i te dobre, i te złe – są integralną częścią naszej osobowości. Mając jednak świadomość poważnych problemów, jakich przysparza niektórym uczniom matematyka, możemy zastanowić się, co zrobić, by „wyczarować” dla naszych dzieci dobre wspomnienia związane z nauką tego przedmiotu. Skąd wziąć jednak „czarodziejską” różdżkę? Jak się okazuje, nie jest to takie trudne.

Wystarczy zaleźć patyk – wierzbowy lub bukowy, sznureczkiem jutowym przywiązać do niego kolorowe listki, i gotowe. Można zacząć czarować! Najlepiej skupić się na tworzeniu nieoczywistych i ciekawych sytuacji sprzyjających dziecięcemu uczeniu się. Często bowiem warunki, jakie stwarzamy naszym dzieciom do nauki, wydają się być wbrew ich naturze. Siedzenie w ławce jest zdecydowanie nienaturalną pozycją dla dzieci, które do prawidłowego rozwoju potrzebują nade wszystko ruchu – trwała wiedza zostanie przez nie zdobyta szybciej, docierając wieloma kanałami, nie tylko przez słuch i wzrok.

Do lasu

Konfucjusz już V wieku p.n.e. wiedział, jaki sposób człowiek najefektywniej się uczy: „Powiedz mi, a zapomnę, pokaż mi, a zapamiętam, pozwól mi zrobić, a zrozumiem”, a my, ucząc, nadal w większości tylko mówimy i pokazujemy. A może by tak zaryzykować, odejść od schematów i stworzyć warunki przyjazne dziecięcemu procesowi uczenia się?

Niewątpliwymi autorytetami w dziedzinie dydaktyki matematyki dla najmłodszych są prof. Edyta Gruszczyk-Kolczyńska oraz dr Ewa Zielińska. Czytam ich książki, czerpię z ich *Dziecięcej matematyki* teorię oraz metodykę matematyki i idę z tą wiedzą dalej – do lasu.

Edukacja leśna daje nam nieoczywistą przestrzeń, w której podczas spontanicznej zabawy wkradamy się do sfery poznawczej dzieci i przeżywamy do niej najróżniejsze treści, w tym matematyczne. Od stuleci wiadomo, że najlepsze efekty uzyskujemy w nauce, która odbywa się poprzez zabawę. Dzieci uczą się najwięcej wtedy, kiedy nie mają poczucia, że są nauczane, kiedy towarzyszy im poczucie radości.

Podczas naszych wypraw do lasu dominuje atmosfera swobody i otwartości, sprzyjająca dziecięcej ciekawości, kreatywności i rozwojowi wewnętrznej motywacji oraz chęci uczenia się. Kwintesencją leśnej edukacji jest kształtowanie w dzieciach kompetencji miękkich, a kiedy na tym polu osiągniemy sukcesy, to od sukcesów edukacyjnych dzieli nas już tylko krok. Jak je zatem skutecznie osiągnąć?

Podstawa programowa jest jak góra, na którą powinniśmy wejść razem z dziećmi. Jednak wybór drogi, którą na nią wejdziemy, zależy od nas.

Matematyka często kojarzy nam się tylko z liczeniem, ale dla dzieci na poziomie edukacji przedszkolnej objawia się jeszcze w wielu innych umiejętnościach.

Punkt IV Podstawy Programowej odnosi się do sfery poznawczej dziecka i zawiera ustępy mó-

wiące o tym, jakie kompetencje powinno osiągnąć dziecko przygotowane do nauki w szkole:

- „11) wyraża ekspresję twórczą podczas czynności konstrukcyjnych i zabawy, zagospodarowuje przestrzeń, nadając znaczenie umieszczonym w niej przedmiotom, określa ich położenie, liczbę, kształt, wielkość, ciężar, porównuje przedmioty w swoim otoczeniu z uwagi na wybraną cechę;
- 12) klasyfikuje przedmioty według: wielkości, kształtu, koloru, przeznaczenia, układa przedmioty w grupy, szeregi, rytmy, odtwarza układy przedmiotów i tworzy własne, nadając im znaczenie, rozróżnia podstawowe figury geometryczne (koło, kwadrat, trójkąt, prostokąt);
- 13) eksperymentuje, szacuje, przewiduje, dokonuje pomiaru długości przedmiotów, wykorzystując np. dłoń, stopę, but;
- 14) określa kierunki i ustala położenie przedmiotów w stosunku do własnej osoby, a także w stosunku do innych przedmiotów, rozróżnia stronę lewą i prawą;
- 15) przelicza elementy zbiorów w czasie zabawy, prac porządkowych, ćwiczeń i wykonywania innych czynności, posługuje się liczebnikami głównymi i porządkowymi, rozpoznaje cyfry oznaczające liczby od 0 do 10, eksperymentuje z tworzeniem kolejnych liczb, wykonuje dodawanie i odejmowanie w sytuacji użytkowej, liczy obiekty, odróżnia liczenie błędne od poprawnego”.

Matematyczne zabawy

W odniesieniu do powyższych punktów zaprezentuję kilka zabaw, które pozwolą nam wejść na górę, zdobywać jej szczyt z uśmiechem i satysfakcją, bez napięcia i zmęczenia – zarówno fizycznego, jak i psychicznego.

„Gdzie jesteś?” – dzieci rozbiegają się swobodnie po lesie na określonym wcześniej terenie.

Jedno z dzieci przywołuje do siebie kolejne osoby, określając ich położenie: „Krzysiu za drzewem”, „Ania pomiędzy pieńkami”, „Ula pod krzaczkiem”.

„Dyrygent” (odwrotna wersja zabawy „Gdzie jesteś?”) – wybrane dziecko określa, gdzie mają się ustawić koleżanki i koledzy: „Krzysiu za drzewem”, „Ania pomiędzy pieńkami”, „Ula pod krzaczkiem”.

„Zbieramy patyki” – zbieranie i układanie przez dzieci patyków według cech jakościowych lub przeciwieństw określonych przez nauczyciela. Na przykład: „przynieście patyk długi i krótki, cienki i gruby, prosty i krzywy”, „przynieście patyk gruby jak wasz kciuk i długi jak wasz but”.

„10 żółdzi” – zabawa w liczenie i wszelkie propozycje z tym związane, czyli na przykład: „nazbieraj 10 żółdzi, przynieś 5 kasztanów, „mam 8 szyszek; nazbierajcie o 1 więcej niż ja”.

„Pudełeczko skarbów” – dzieci dostają pudełeczko z przegródkami i zbierają do nich materiał naturalny według wskazanej przez nauczyciela lub siebie cechy. Na przykład: „zbieramy coś zielonego, coś twardego, coś pachnącego, coś z drzewa” itp. Zaobserwujemy bardzo dużą różnorodność zbiorów, jeśli umówimy się z dziećmi, że do każdej przegródki należy włożyć coś innego.

„Zbiory” – „zbierz 10 kasztanów, 10 żółtych liści i 10 szyszek i włóż je do odpowiedniego koszyka, a teraz wymyśl i ułóż z nich rytym”.

„Gruby i chudy pień” – „zmierz za pomocą sznurka obwód dwóch drzew (na początek wybierz takie, których obwód pnia znacznie się różni); rozwiń sznurki na trawie i porównaj je – wyraźni widzisz, które drzewo jest grubsze, a które cieńsze. Teraz zrób to samo, ale z drzewami podobnej grubości. Na koniec użyj miarki krawieckiej, by dokładnie poznać obwód drzew”.

Niegroźne ryzyko

Odchodzenie od schematów nauczania oraz systemu klasowo-lekcyjnego wymaga niewątpliwie od nauczyciela odwagi, innego przygotowania i wyjścia poza strefę komfortu, jaką jest sala – mam jednak w sobie silne przekonanie, że warto. Ja podjęłam to ryzyko kilka lat temu, wychodząc z przedszkola do lasu i dziś z radością obserwuję, jak wielokierunkowo rozwinęły się „leśne dzieci”, jak szybko nabywają szereg kompetencji matematycznych. Od kilku lat obserwujemy, że nurt leśnej edukacji w Polsce zyskuje na popularności, a leśne placówki stwarzają i oferują ciekawe i nieszablonowe metody pracy poprzez wyjątkowe spojrzenie na dziecko oraz jego rozwój.

Dlatego wyjdź z zamkniętej przestrzeni, weź patyk – wierzbowy lub bukowy – sznureczkiem jutowym przywiąż do niego kolorowe listki, i idź z dziećmi do lasu wyczarować im salę matematyczną, o jakiej nie śniły.

Marta Król

Nauczycielka wychowania przedszkolnego w Przedszkolu Niepublicznym KACPER w Załomiu.

Wiele warstw cebuli

Anna Kondracka-Zielińska

Potyczki matematyczno-polonistyczne

„Co innego cebula.
Ona nie ma wnętrzości.
Jest sobą na wskroś cebulą,
do stopnia cebuliczności”.

(Wisława Szymborska)

Co innego matematyka. Ona nie ma wnętrzości. Jest sobą, na wskroś matematyką, do stopnia matematyczności. Niech ta parafraza słów poetki posłuży za wstęp do moich polonistycznych rozważań nad „królową nauk”. Wydawałoby się, że oba przedmioty są od siebie oddalone niczym niebo od ziemi, alfa od omegi, Szczecin od Irkucka. A jed-

nak wiele je łączy. Matematyka jest jak cebula, bo wyciska łyżę u tych bez zdolności matematycznych i wiecznie zagrożonych z przedmiotu. Matematyka ma warstwy, skomplikowane struktury, ale – jak po nitce do kłębka – tak i w niej dochodzi się do istoty rzeczy. Nauczyciele chyba nazbyt często skupiają się na tej zewnętrznej powłoce (rozwiązywaniu zadań, przygotowywaniu do matury), bo rankingi, podstawa itp., a zbyt rzadko rozważają, co znajduje się w środku, czyli umiejętności przydatne w pozaszkolnym, realnym życiu.

Wzory, funkcje, algorytmy

Do napisania niniejszego artykułu zainspirował mnie tekst pod tytułem *Matematyka ma po prostu warstwy*, opublikowany na stronie FB „EDU-kla-ster”, prowadzonej przez Wojciecha Gawlika. Znajdziemy tam wiele ciekawych artykułów (na przykład *Nierówny wyścig*, *Rynek popytowo-podażowy*, *Wyobraź sobie taką pracę*) oraz porad i narzędzi edukacyjnych. Ich wspólnym celem jest wsparcie nauczycieli w dążeniu do tego, by ich codzienna praca była nowoczesna, pełna pasji i by generowała realne zmiany w otaczającym świecie.

Wzory, tabelki, cyferki i funkcje. Przekształcenia i wykresy, algorytmy i logarytmy, sinusy i cosinusy. Cytując, tym razem Gałczyńskiego, pytam: „po cholerę toto żyje?” (*Satyra na bożą krówkę*). Konia z rzędem temu, kto kiedykolwiek – poza szkołą – zastosował którekolwiek z powyższych. Do codziennych zakupów, operacji bankowych i innych prostych czynności związanych z finansami przecież ich nie potrzebujemy. Przydać się jedynie mogą tym nielicznym, którzy wybiorą się na studia techniczne, a potem konsekwentnie w pracy zawodowej, jeśli nie zrezygnują z obranej drogi: informatyki, mechatroniki, automatyki.

W kierunkach realizacji polityki oświatowej państwa na rok szkolny 2019/2020 jeden z punktów brzmi: *Rozwijanie kompetencji matematycznych uczniów*, i nie ma się czemu dziwić – w codziennym życiu matematyka okazuje się bowiem potrzebna właściwie do wszystkiego. Liczymy kalorie przy dietach, podatki i procenty przy kredytach, przejechane kilometry i zużycie paliwa, analizujemy inflację. Uczniowie bardzo szybko zdają sobie jednak sprawę, że szkolne kompetencje matematyczne nijak się mają do rzeczywistych potrzeb, dlatego wiele z tych formuł i wzorów po maturze „użytkują”. Szkolna matematyka to matematyka zadań, a w życiu chodzi o coś więcej niż ślęczenie nad arkuszem z poleceniami do rozwiązania w wyznaczonym czasie i ocenianych według podanego

klucza. Z zadaniami zawsze jakoś sobie poradzimy: albo sami (z kalkulatorem), albo z pomocą internetu. W „normalnym” życiu nie zawsze jest tak łatwo.

Trening dla mózgu

Czy polonista i matematyk mogą sobie wzajemnie pomóc? Czy jest jakaś płaszczyzna porozumienia? Uczniowie niekiedy żartują sobie z parabol czy sinusoidy, bo bardzo ich śmieszy, że pojęcia z lekcji matematyki występują również na polskim. A zadania z treścią? Zdobywana na polskim umiejętność czytania ze zrozumieniem pozwala wyłuskać matematyczny problem i zaplanować właściwy tok obliczeń. Pewnie dlatego w najnowszej podstawie programowej dla szkoły ponadpodstawowej za najważniejszą ponadprzedmiotową umiejętność uznano myślenie (analityczne, logiczne, przyczynowo-skutkowe, kreatywne, pojęciowe). Ten złożony proces wzajemnego oddziaływania na siebie wielu operacji (na przykład: wnioskowania, rozumowania, rozwiązywania problemów) pozwala nie tylko uczyć się wielu różnych przedmiotów, ale również funkcjonować z powodzeniem we współczesnych świecie. Chodzi o ty, by uczeń wyrabiał w sobie nawyk krytycznego myślenia, rozwijał umiejętność zadawania właściwych pytań, analizował błędy i tworzył schematy, szukał korelacji, posługiwał się kryteriami i przykładami, uzasadniał, wnioskował, definiował – bez względu na to, czy mierzy się z interpretacją *Makbeta*, rachunkiem prawdopodobieństwa, równaniem różniczkowym czy pisanie rozprawki.

Zajęcia z matematyki są pewnego rodzaju cyklem treningowym, zwiększającym elastyczność naszego umysłu w odpowiednich obszarach. W szkole powinniśmy się dowiedzieć, czym jest funkcja i jak obliczyć sinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, ale znajomość samego wzoru ma już znaczenie drugoplanowe. Musimy jednak pamiętać, że może się nam kiedyś przydać.

Najistotniejsze jednak jest to, żeby nie zdławić motywacji uczniów do trenowania mózgu. Trening dostosowany do ich możliwości przynosi efekty i sukces – nie tylko edukacyjny. Jeżeli ciężar zadań lub ich liczba przekroczy uczniowskie możliwości, to zamiast sukcesu otrzymamy w pakiecie zniechęconego ucznia, roszczeniowego rodzica, niezadowolonego dyrektora i... sfrustrowanego nauczyciela, czyli nas samych w wersji najmniej pożądanej.

Lekcja kombinatoryki

Ze względu na odmienne nachylenia klas (dawniej „profile”) należy przyjąć, że trafiających do nich uczniów cechują inne priorytety edukacyjne. (O różnicach w uczeniu w klasach matematycznych i humanistycznych pisałam już w numerze 3 „Refleksji” w roku 2018). Jednakże, tak jak na matematyce można uciec od problemów z obliczeniami (pozorowana dyskalkulia), tak na polskim furtkę dla niektórych stanowi pozorowana dysortografia i udawana dysgrafia (nie mam na myśli osób z rzetelnie zdiagnozowanymi dysfunkcjami). Jeśli przyjąć, że w nauce matematyki nie jest ważna precyzja obliczeniowa, to tak jakby w języku polskim nie była potrzebna ortografia! W końcu od czego są słowniki czy autokorekta...? Uważam jednak, że tak jak potrzebna jest umiejętność szacowania wyników, wyciągania z nich określonych wniosków, tak również niezwykle istotna jest sama umiejętność poprawnego ich wprowadzenia. Kalkulator obliczy wszystko, co

do niego wpisze. Niestety, każda literówka i błąd przy „wklepywaniu” danych zostaną również wzięte pod uwagę w obliczeniach.

Szkolna matematyka na większości profili (poza matematycznym) jawi się chyba jako labirynt bez nici Ariadny. Uczeń coraz bardziej utwierdza się w przekonaniu, że nie dla niego czerpanie radości z matematycznego sukcesu; najpierw bowiem trzeba go osiągnąć, a ten dla każdego w tej dziedzinie ma inny wymiar. Statystyczny Jaś rozwija się głównie w pozorowaniu, zamiast realnie trenować mózg matematycznymi łamigłówkami, co przyniosłoby pożytek również dla pozostałych przedmiotów – z językiem polskim włącznie. I tak, każda następna lekcja, nie tylko matematyki, jest coraz bardziej lekcją z „kombinatoryki” – kombinowania pospolitego, umiejętności przetrwania i zaledwie radzenia sobie z wcale niewygórowanymi wymaganiami szkolnymi.

Anna Kondracka-Zielińska

Doktor nauk humanistycznych, literaturoznawczyni.

Nauczycielka języka polskiego w I Liceum

Ogólnokształcącym im. Marii Skłodowskiej-Curie w Szczecinie.

Nauczycielka konsultantka ds. nauczania języka polskiego

w szkołach ponadpodstawowych w Zachodniopomorskim

Centrum Doskonalenia Nauczycieli.

W jednym stali domu

Anna Stęrzewska

Pięć zasad skutecznego nauczania matematyki (i innych przedmiotów)

Długo zastanawiałam się, jak zatytułować ten tekst. W pewnym momencie, podczas spaceru z psem, między jednym a drugim korepetycjami, pojawiły się w mojej głowie dwa pomysły: „punkt widzenia zależy od punktu siedzenia” i „uczeń i nauczyciel w jednym stali domu”. Pierwszy z nich trąci niemałym banałem, ale jak mało który, moim zdaniem, świetnie opisuje rzeczywistość. O głębokiej mądrości tkwiącej w tym powiedzeniu przekonuję się każdego dnia, ucząc matematyki. Uczniowie, skupieni na kolejnych klauzurkach, egzaminach, „królową nauk”

postrzegają jako szkolny koszmar. Dla wielu z nich to prawdziwa pięta achillesowa. Dla mnie, jako osoby przybliżającej matematykę swoim uczniom, to prawdziwa pasja. Tylko tak do niej podchodząc, jestem w stanie dotrzeć do serc i umysłów uczniów i umożliwić jej zrozumienie. Moje zaangażowanie, entuzjazm udzielają się także uczniom – z czasem otwierającym się na tajniki matematyki. Nie potrafię sobie wyobrazić, co byłoby bez „tego czegoś”. Gdyby miało być inaczej, uczciwsze wobec siebie i moich uczniów byłoby znalezienie sobie innego zajęcia.

Paweł i Gaweł

Choć uczeń i nauczyciel „w jednym stoją domu” – często patrzą na matematykę zgoła inaczej, choć przecież siedzą na jednej gałęzi. Tak jak nie ma aktora bez publiczności, tak samo osoba dzieląca się wiedzą bez sympatii uczniów nie działa zbyt wiele. Od dawna wychodzę z założenia, że nauczyciel z prawdziwego zdarzenia powinien lepiej poznać świat ucznia – ze wszystkimi jego blaskami i cieniami. Znając sytuację pozaszkolną uczniów, możliwe przyczyny słabszych wyników w nauce, a nawet wiedząc, co jest na uczniowskim topie w mediach społecznościowych, jesteśmy w stanie zyskać zaufanie, uwagę naszych wychowanków. Mamy wówczas szansę stworzyć partnerską relację, bowiem sam autorytet nauczyciela i wiedza merytoryczna w tych czasach nie wystarczą. Potrzebujemy czegoś więcej.

Tym sekretnym czynnikiem z pewnością jest empatia, czyli zdolność do współodczuwania, wejścia w skórę ucznia. Dlatego też jestem zdecydowaną przeciwniczką często powtarzanego banału: „kiedyś było inaczej”. O ile dawniej sam warsztat wystarczał do skutecznego nauczania matematyki, to współczesny belfer do sukcesu potrzebuje także szeroko pojętych umiejętności miękkich. Powinien wiedzieć, kiedy być twardym, zasadniczym, a kiedy serce połączyć miodem i docenić nawet najmniejsze starania czy postępy w nauce. Dawne przekonania nie wniosą niczego konstruktywnego do naszego warsztatu, a mogą się jedynie stać przeszkodą w budowaniu więzi między uczniem a nauczycielem. Powinniśmy zatem starać się zrozumieć uczniów i wykorzystać to, co może sprzyjać w nauczaniu matematyki czy innych przedmiotów.

Poradnik pedagoga

Swoimi spostrzeżeniami i wnioskami dzielę się z perspektywy własnej firmy, którą założyłam po

to, by udzielać korepetycji z zakresu matematyki. Jestem jednak przekonana, że każdy nauczyciel, chcący skuteczniej docierać do serc i umysłów uczniów – bez względu na formę i miejsce pracy – znajdzie tu coś o sobie i dla siebie. Niezależnie od statusu szkoły, prowadzonego przedmiotu oraz doświadczeń. Oto kilka zasad, które pomagają mi każdego dnia w codziennej współpracy z uczniem.

Po pierwsze: poznaj swojego ucznia. Odradzam tu jednak stawianie młodej osoby w krzyżowym ogniu pytań, jeśli chcemy zyskać jej przychylność oraz zaufanie do nas i naszych umiejętności. Od czasu do czasu warto zapytać o samopoczucie, ulubione zabawy, pasje, marzenia. Każdemu nauczycielowi polecam zaprzyjaźnienie się z mediami społecznościowymi. Czy tego chcemy, czy też nie, tam się toczy życie naszych uczniów, prowadzone równoległe do tego „rzeczywistego”. To kapitalne narzędzie do poznania psychiki, mód i tendencji, jakimi żyją nasi wychowankowie.

Po drugie: prostota. Kieruję się nią, zwłaszcza wyjaśniając rozmaite matematyczne zagadnienia. Chociaż wierzę w możliwości uczniów, to staram się upraszczać matematykę, jak tylko to możliwe. Warto rozłożyć na czynniki pierwsze polecenia, definicje, przybliżać je własnymi słowami, nawet jeśli nie wydaje nam się to wystarczająco „matematyczne”. Być może to kontrowersyjne, ale dla dobra ucznia czasem zamiast używać słowa „licznik”, mówię o tym, co znajduje się nad „kreską”. Z lektury raportów rozmaitych badań wiemy, że mózg ucznia na początku szkolnej drogi nie jest jeszcze gotowy na myślenie wyłącznie na poziomie abstrakcyjnym, do swobodnego operowania definicjami znanymi ze szkolnych podręczników. Zdecydowana większość małych dzieci (około 80%) jest uzdolniona matematycznie. W przedszkolu naukę ułatwiają im konkretne przedmioty: koraliki, patyczki, klocki, zabawki. Natomiast przejściu z przedszkola do szkolnej ławy towarzyszy im niełatwy przeskok, polegający na zmianie charakteru nauki – z zabawy na pracę z książką

i podążanie za skomplikowanymi brzmiącymi poleceniami czy definicjami.

Po trzecie: przykłady. Edukacja szkolna ma sens tylko wtedy, gdy jest powiązana z tym, co widzimy za oknem, doświadczamy w domu, na podwórku, w sklepie. Dlatego podczas zajęć odwołuję się do przykładów znanych z codzienności. Wszak, jak głosi przysłowie wywodzące się z łaciny, uczymy się dla życia, nie dla szkoły. Podatki, ceny poszczególnych produktów, pojęcia takie jak netto, brutto, historie znane uczniom z podwórek, zależności rodzinne – to wszystko wykorzystuję na moich lekcjach. Rewelacyjnie sprawdzają się także inicjatywy, dla których inspiracją są stare pomysły, jak na przykład Szkolna Kasa Oszczędności. Gorąco zachęcam również nauczycieli specjalizujących się w innych przedmiotach do korzystania z przykładów spoza klasy.

Po czwarte: dziel się i korzystaj z doświadczenia innych. Z pomocą w tym zakresie przychodzą nam wszelkiego rodzaju szkolenia dla nauczycieli organizowane przez ośrodki doskonalenia, kuratoria, organizacje pozarządowe, firmy szkoleniowe, trenerów rozwoju. Fantastyczną możliwością poszerzania nauczycielskich horyzontów i korzystania z doświadczeń innych nauczycieli są rozmaite grupy na Facebooku, gdzie każdy i każda z nas może się dzielić swoimi sposobami na skuteczniejsze nauczanie. Gdyby nie one, nie rozwijałabym tak skutecznie swojego warsztatu w zakresie notowania graficznego, z czego korzystam także podczas moich codziennych lekcji. Czerpmy ze wszelkich dostępnych zasobów, ale i też dzielmy się naszymi zdobyczami z innymi. Wierzę, że w ten sposób jesteśmy w stanie realnie wpływać na rozwój systemu edukacji w Polsce.

Po piąte: daj prawo do popełniania błędów – sobie i uczniom. Niech to będzie dla nich ważne doświadczenie, rodzaj nowej cennej lekcji. Szkoła to idealne miejsce do uczenia się na własnych błędach. Poza jej murami błędy sporo kosztują.

Tych pięć zasad przyświeca mi w codziennej pracy. Każdego dnia czuję, jak bardzo ułatwiają mi współpracę z uczniami. A czym Ty się kierujesz jako nauczyciel? Co Tobie pomaga w codziennym przekazywaniu wiedzy? Chętnie przeczytam o doświadczeniach innych nauczycieli w kolejnych numerach „Refleksji”.

Anna Stęrzewska

Z wykształcenia ekonomistka. Od ponad 3 lat prowadzi firmę korepetycyjną „Nauka Marzeń”. Na Facebooku założyła grupę „Wizualna Matematyka”, która zrzesza ponad 5000 osób. Ambasadorka książki Kamili Rowińskiej *Kobieta Asertywna*.

Dlaczego istniejemy?

Jadwiga Adamczewska

Nauka filozofii w szkolnej ławce

Od czasów starożytnych do dziś o filozofii napisano wiele tomów mądrości i mało kto deprecjonuje jej wartość. Nie można jednak udawać, że oprócz apologetów są również tacy, którzy uważają, że filozofowanie to zwykła strata czasu – zwłaszcza we współczesnej szkole. Na szczęście tych pierwszych jest więcej, również wśród decydentów, mających wpływ na programy nauczania. W nowej strukturze edukacji, po szkole podstawowej, pojawiła się możliwość wprowadzenia krótkiego kursu filozofii i wiele szkół z tego skorzystało. Dobrze,

że tak się stało. W wielu krajach Unii Europejskiej filozofia jest przedmiotem obowiązkowym. Dawniej w polskiej edukacji też bywała – dosłownie, bowiem pojawiała się i znikwała. W dwudziestoleciu międzywojennym, do 1932 roku, wykładana była, obok kosmologii, w gimnazjum. Po drugiej wojnie światowej nastąpił regres w nauczaniu filozofii – czasami była ujęta w programie klasy humanistycznej. Z własnego doświadczenia pamiętam nieustanne dyskusje toczące się wokół pytania: komu to potrzebne i do czego prowadzi?

Dzisiaj filozofia wróciła do szkół i tylko się cieszyć! Trzeba wierzyć, że ten krótki kurs poszerzy horyzonty uczniów, nauczy ich samodzielnego, logicznego myślenia, skłoni do twórczego dziwienia się i zadawania pytań. Jedną z pierwszych lekcji filozofii poświęcona jest właśnie tematowi: *Pytania filozoficzne*. Młodzież poznaje najważniejsze cechy pytań filozoficznych, które przecież będzie zadawała sobie przez całe dorosłe życie. Ojciec Józef Bocheński ciekawie wyjaśnił ich specyfikę: „Gdzie inne nauki się zatrzymują, gdzie rezygnując z dalszych pytań, przyjmują pewne założenia, tam filozof dopiero zaczyna pytać. Nauki poznają – on zaś pyta, czym jest poznanie; inni formułują prawa – on zaś stawia pytanie, czym jest prawo. Szarzy ludzie i politycy mówią o sensie i o celowości – filozof pyta, czym jest sens i cel (*Ku filozoficznemu myśleniu*).

Z podręcznika do filozofii: „Ciekawych przykładów współczesnych pytań filozoficznych dostarczył brytyjski fizyk i kosmolog Stephen Hawking (1942–2018) w książce *Krótkie odpowiedzi na wielkie pytania*. Chociaż naukowiec starał się odpowiedzieć na poruszone kwestie ze ściśle naukowej perspektywy, to wydaje się, że pytania te dotyczą najogólniejszych aspektów rzeczywistości i pociągają za sobą konieczność podjęcia filozoficznego namysłu”. Oto niektóre z nich:

- Czy istnieje Bóg?
- Jak to wszystko się zaczęło?
- Czy są inne rozumne istoty w kosmosie?
- Czy da się przewidzieć przyszłość?
- Co jest wewnątrz czarnej dziury?
- Czy możliwa jest podróż w czasie?
- Czy ludzkość przetrwa na Ziemi?
- Czy powinniśmy skolonizować kosmos?
- Czy sztuczna inteligencja zdominuje ludzką?
- Czy możemy kształtować naszą przyszłość?

Pytania tego wielkiego uczonego zainspirowały młodzież. Pracując w grupach, sformułowali własne pytania filozoficzne (podkreślone są te, które zostały wybrane jako najciekawsze w danej klasie).

Klasa 1a (matematyczno-technologiczna)

- Skoro życie jest tak krótkie, czemu robimy tyle rzeczy, których nie lubimy?
- Jak żyć we współczesnym świecie?
- Gdzie kończy się rzeczywistość, a zaczyna abstrakcja?
- Po co?
- Dlaczego naszym największym ograniczeniem jest nasz własny umysł?
- Czy materia jest skończona?

Klasa 1b (medyczna)

- Jak wyglądałby świat, gdyby dinozaury nie wyginęły?
- Jaki jest sens wiary w Boga, skoro nie wiemy, czy istnieje?
- Jaki sens ma życie w cierpieniu i chorobie?
- Czym są zjawiska paranormalne, czy faktycznie istnieją, czy może to tylko wymysł człowieka?
- Jak wyglądałoby życie na słońcu, gdyby było możliwe?
- Czy życie może mieć głębszy sens, skoro ma swój ostateczny kres?
- Dlaczego większość ludzi, malując oczy, otwiera usta...?
- Czy kiedykolwiek uda się skonstruować inną formę człowieka?

Klasa 1c (dziennikarsko-prawna)

- Po co żyjemy i staramy się przejść przez życie jak najlepiej, skoro przecież umrzemy?
- Czy istnieje inna cywilizacja, czy się kiedyś spotkamy i czy mamy szansę na porozumienie?
- Skąd mamy być pewni, że ludzie obdarzeni są świadomością?
- Co robimy we wszechświecie, jaką mamy rolę do spełnienia?
- Czy człowiek doprowadzi do upadku świata?
- Czemu ludzie wciąż naiwnie myślą, że uda im się odpowiedzieć na pytanie: jaki jest sens życia?

Klasa 1d (dwujęzyczna angielska)

- Czy istnieje przeznaczenie?
- Czym jest szczęście?
- Jaki będzie koniec świata?

- Czy rzeczy, które widzimy, naprawdę istnieją?
- Ile naprawdę może znieść człowiek w życiu?
- Co po końcu świata?
- Dlaczego ludzie do życia potrzebują wiary?
- Czy niewidzący widzą swoje sny?
- Dlaczego ludzie, którzy zamawiają dużą porcję frytek, zamawiają do nich colę light?
- Dlaczego igły do śmiertelnego zastrzyku przy eutanazji są sterylizowane?

Klasa 1 f (matematyczno-językowa)

- Dlaczego istniejemy?
- Dlaczego poszczególne słowa mają akurat takie znaczenie?
- Jakiego koloru jest ból?
- Co po śmierci?
- Skąd mamy pewność, że nasza rzeczywistość jest prawdziwa?
- Czy nasz los jest z góry przesądzony?
- Dlaczego każdy myśli inaczej?
- Jakim językiem mówili Adam i Ewa?
- Co to znaczy „wszystko”?
- Jak wygląda nicość?
- Dlaczego właśnie tych ludzi spotykam na swej drodze?

Niektóre z pytań są bardzo poważne, inne trochę mniej. Zgodnie z sugestią nauczyciela miały one dotyczyć zagadnień ontologii, epistemologii i aksjologii; i takie właśnie były.

Dla mnie najciekawszym pytaniem zaproponowanym przez młodzież jest: Czemu ludzie wciąż naiwnie myślą, że uda im się odpowiedzieć na pytanie: jaki jest sens życia? Myślę, że to pytanie stale towarzyszy wielu ludziom i powraca na różnych etapach ich życia. Próbą odpowiedzi mogą być słowa poetki noblistki, Wisławy Szymborskiej:

Życie na poczekaniu

Życie na poczekaniu.

Przedstawienie bez próby.

Ciało bez przymiarki.

Głowa bez namysłu.

Nie znam roli, która gram,

Wiem tylko, że jest moja, niewymienna.

O czym jest sztuka,

zgadywać muszę wprost na scenie.

Kiepsko przygotowana do zaszczytu życia,

narzucone mi tempo akcji znoszę z trudem.

Improwizuję, choć brzydzę się improwizacją.

Potykam się co krok o nieznaną rzecz.

Mój sposób bycia zatrąca zaściankiem.

Moje instynkty to amatorszczyzna.

Trema, tłumacząc mnie, tym bardziej upokarza.

Okoliczności łagodzące odczuwam jako okrutne.

Nie do cofnięcia słowa i odruchy,

nie doliczone gwiazdy,

charakter jak płaszc w biegu dopinany –

oto żałosne skutki tej nagłości.

Gdyby choć jedną środę przećwiczyć zawczasu,

albo choć jeden czwartek raz jeszcze powtórzyć!

A tu już piątek nadchodzi z nie znanym mi

scenariuszem.

Czy to w porządku – pytam

(z chrypką w głosie,

bo nawet mi nie dano odchrząknąć za kulisami)

Złudna jest myśl, że to tylko pobieżny egzamin

składamy w prowizorycznym pomieszczeniu. Nie.

Stoję wśród dekoracji i widzę jak są solidne.

Uderza mnie precyzja wszelkich rekwizytów.

Aparatura obrotowa działa od długiej już chwili,

Pozapalane zostały najdalsze nawet mgławice.

Och, nie mam wątpliwości, że to premiera.

I cokolwiek uczynię,

zmieni się na zawsze w to, co uczyniłam.

Zadanie domowe brzmiało: „Które z pytań filozoficznych jest dla Ciebie najciekawsze i najbardziej inspirujące? Uzasadnij kryterium wyboru”. Odpowiedzi, chociaż interesujące, pokazały, że trzeba pracować nad umiejętnością uzasadniania własnych sądów czy wyborów – nie tylko na lekcjach filozofii.

Jadwiga Adamczewska

Nauczycielka etyki i filozofii w XIV Liceum

Ogólnokształcącym w Szczecinie.

Kulturowe pomosty

Joanna Przeobrażeńska, Klaudia Szostak

Relacja z V Uroczystego Kongresu Polonistów i Bibliotekarzy

„Teraz nie pora myśleć o tym, czego ci brak. Lepiej pomyśl, co możesz zrobić z tym, co masz”.

(Ernest Hemingway)

Program V Uroczystego Kongresu Polonistów i Bibliotekarzy, który odbył się 2 grudnia 2019 roku w Warszawie, skupiał się na zagadnieniach dotyczących zmieniającego się języka młodzieży oraz wyzwaniu stojącym przed polonistami, jakie stanowią ciekawe i skuteczne sposoby realizacji wymagań podstawy programowej. Największe emocje wzbudzał pogłębiający się

dysonans między sposobami komunikacji, percepcją świata młodych ludzi a tym, co zastają w przestrzeni szkolnej, zderzając się z coraz bardziej anachronicznymi i trudnymi w odbiorze tekstami literackimi. Skuteczna komunikacja – a zatem także proces edukacji – opiera się na dialogu i, co za tym idzie, na wzajemnym słuchaniu, co jest umiejętnością cenną, ale tracącą dzisiaj na znaczeniu. Rolą nauczyciela polonisty, między innymi, jest nie dopuścić do zaniku umiejętności słuchania z uwagą drugiego człowieka.

Nowa inwokacja

Dyskusję panelową rozpoczął dziennikarz Tomasz Sianecki, podejmując temat lektur szkolnych i podkreślając ich anachroniczność na przykładzie *Krzyżaków* i *Szyfowych prac*. Większość tekstów znajdujących się w kanonie nie przystaje do naszej rzeczywistości, tworząc jednocześnie barierę językową i trudności percepcyjne. Z kolei Michał Rusinek, literaturoznawca, tłumacz i pisarz, przywołał myśl francuskiego filozofa Jacquesa Derridy, według którego nic tak nie zabija czytania jak kanonizacja. Zdaniem prelegenta, obecna podstawa programowa wzbudza ogromne kontrowersje – przede wszystkim ze względu na liczbę tekstów. Ponadto gros z nich to utwory literatury dawnej. By lekcje języka polskiego nie stały się torturą duchową, a ciekawym i inspirującym doświadczeniem, młodzież powinna mieć przede wszystkim większy wpływ na dobór lektur, a tym samym możliwość analizowania tekstów, które należą do kręgu ich zainteresowań.

Współczesny nauczyciel staje przed niełatwym zadaniem osławiania rzeczywistości szkolnej i świadomego prowadzenia ucznia przez arkana literatury i języka, przy jednoczesnym łączeniu w swoich metodach atrakcyjnych dla młodzieży sposobów komunikacji. Prelegenci zwrócili uwagę na memy oraz nowoczesne translacje tekstów dawnych, między innymi *Inwokacji* na język hip-hopu. Proponowali wsparcie procesu dydaktycznego edukacją filmową, która prowokuje do twórczej dyskusji.

Internet stanowi dziś podstawowe źródło informacji i tylko uczenie krytycznego wykorzystania tego medium zapewni skuteczne i ciekawe uczestnictwo młodych ludzi we współczesnym świecie. A to niezwykle ważna rola dla polonisty. Jak podkreśliła językoznawczyni profesor Halina Zgółkowa, słynna kartezyjańska teza: *Cogito ergo sum* stanowi klucz do pojmowania rzeczywistości literackiej i pozaliterackiej. Można tę myśl filozo-

fa racjonalisty poszerzyć o następujące konteksty znaczeniowe: myślę (czytam, mówię, piszę) – więc jestem.

Wśród podejmowanych tematów pojawił się problem wpływu języka angielskiego na współczesną polszczyznę. Zjawisko to często określa się terminem *polenglish*. Prelegenci wyrazili przekonanie, że polszczyzna przetrwa, co dobitnie spuentowała profesor Zgółkowa następującymi słowami: „Przeżyliśmy potop szwedzki, przetrwamy i angielski”. Podobną opinię wyraził Michał Rusinek. Apelował, aby zaakceptować internet jako nową przestrzeń dla wyrażania myśli i źródło inspiracji dla młodomowy. Zwracał też uwagę, że na naszych oczach kultura literacka zmienia się w kulturę obrazkową i w niej trzeba szukać pomysłów realizacyjnych w procesie dydaktycznym.

Mowa palcowa

Nawiązując do powyższej tezy, Bartek Chaciński, na co dzień dziennikarz „Polityki”, podjął temat języka młodzieży w kontekście postępującej jego potocyzacji. Wyraził swoje przekonanie, iż przyczyna tego zjawiska jest powszechnie znana. Ujął ją w ramy tak zwanej mowy palcowej, która zawiera się w przenikaniu języka mówionego i pisanego. Na współczesne wypowiedzi młodzieży bardzo wpływa używanie mediów społecznościowych, między innymi Instagrama i Twittera, gdzie skrótowość jest główną formą porozumiewania się. Stąd dwutorowość języka młodzieży. W mowie i piśmie przeważają akronimy, a nawet twory słowne inspirowane głównie angielszczyzną. Wystarczy przytoczyć te najczęściej wykorzystywane: LOL; xD; xoxo (całusy i uściski); BTW (*by the way* – przy okazji); AFK (*away from keyboard* – dosł. z dala od klawiatury), tl;dr (*too long; didn't read* – za długie, nie czytałem/-am); GG (*good game*); z/w (zaraz wracam); NTNRR (no to na razie); ATSD (a tak swoją drogą).

Autorytetami, które kształtują język młodzieży, są przede wszystkim wykonawcy muzyki hiphopowej i to właśnie tam należy szukać wiedzy, inspiracji do przeprowadzania niektórych zadań w trakcie lekcji. To nowe wyzwanie dla nauczyciela, które pozwala na wykorzystanie chociażby memów czy tekstów utworów muzycznych. Daje się też zauważyć, że hasztagi stają się nowym i naturalnym dla młodzieży elementem językowym wprowadzanym do tradycyjnej wypowiedzi. Warto też, dla wzmocnienia komunikatów w trakcie lekcji, zaglądać na językowe vlogi, na przykład Mateusza Adamczyka czy Pauliny Mikuły („Mówiąc inaczej”). Wzbogacą one przekaz i czynią go atrakcyjniejszym.

Kolejna prezentacja dotyczyła edukacji filmowej. Z żalem trzeba zauważyć, że niezwykle trudno jest pogodzić realizację podstawy programowej języka polskiego z możliwością wykorzystania w satysfakcjonującym wymiarze filmu jako jednej z ciekawszych dla uczniów form przekazywania wiedzy o życiu i świecie. Za mało jest w edukacji polonistycznej czasu na to, by film mógł zająć miejsce nawet równorzędne względem literatury. A przecież współczesne pokolenie bardziej identyfikuje się z wizualną wizją świata. Być może jest to kierunek, w którym powinniśmy podążać? Być może to film będzie tym narzędziem, dzięki któremu łatwiej zbudujemy relację kulturową i międzyludzką? Film daje też szansę na stworzenie pomostu między przeszłością a teraźniejszością.

Wrażliwość i przekaz

Podobne wnioski ze swej praktyki szkolnej zaprezentowała Barbara Matusiak, wieloletnia nauczycielka języka polskiego. Skupiła się przede wszystkim na własnych pomysłach związanych z odczarowaniem tak naprawdę w większości nudnego repertuaru czytelniczego ujętego w podstawie programowej. Wyraziła też ogólną opinię – podzielaną przez środowisko polonistów – że obecny

kanon lektur jest zbyt restrykcyjny i nie rozbudza zamiłowania do czytelnictwa wśród młodzieży, a wręcz zniechęca do tej aktywności. Co zrobić, by to zmienić? Prelegentka przedstawiła kilka lekturowych propozycji, akcentując, że im trudniejszy tekst, tym bardziej należy go przedyskutować. Ale zanim to nastąpi, nie należy rezygnować z głośnego czytania utworów. To daje szansę na zrozumienie tekstu, wychwycenie niezrozumiałych słów i wzmocnienie wrażliwości na przekaz. Poniżej kilka przykładów utworów omawianych przez prelegentkę z takiej oto perspektywy dydaktycznej i z uwzględnieniem interdyscyplinarności.

Rozmowa Mistrza Polikarpa ze Śmiercią – motyw danse macabre

Porządek omawiania tekstu:

- wyjaśnienie terminu *danse macabre* w odniesieniu do sztuk wizualnych,
- czytanie tekstu wraz z objaśnieniami językowymi, analiza przedstawionego obrazu,
- omówienie *Wywiadu* Mirona Białoszewskiego – rola aluzji literackiej/rozwój motywu,
- Camille Saint-Saëns, *Danse macabre*, Op. 40 (utwór dostępny na YouTube),
- uczniowska wersja *Rozmowy* – inscenizacja (przełożenie tekstu na język *Thrillera* Michaela Jacksona).

Rytmy albo wiersze polskie Mikołaja Sępa-Szałyńskiego – najwyższa skala trudności

Wyzwania:

- Jak unaocznic tę niesłychaną migotliwość, emocjonalne rozedrganie jego liryków?
- Jaką drogą pójść, żeby uzmysłowić młodzieży tak ważne dla artysty kruchość i przemijalność doczesności?
- Jak ukazać uniwersalność jego doświadczenia, owocującego rozczarowaniem światem materii i jednoczesną tęsknotą za wiecznością?

Porządek omawiania sonetów Szarzyńskiego:

- prezentacja ikonek – cecha wspólna (dyskusja),

- analiza obrazu Caravaggia *Grający na lutni*,
- *vanitas* – symbolika,
- odczytanie tekstu sonetu *O nietrwalej miłości rzeczy świata tego* – ilustracja muzyczna: Corrette, *Carillon des Morts* (*Dzwony Śmierci*),
- intuicyjna interpretacja (temat, nastrój),
- „tłumaczenie”,
- szczegółowa interpretacja wiersza,
- debata korespondencyjna – wartości trwałe, wartości przemijające.

Ważnym elementem, na który zwróciła uwagę Barbara Matusiak, jest potrzeba częstego analizowania materiału językowego zawartego w tekstach literackich. Dlatego warto, jej zdaniem, łączyć analizę tekstu literackiego z lekcjami językowymi. Proces ten obejmuje ćwiczenia słownikowe, odszukiwanie znaczeń, etymologii, co w rezultacie przybliży nie tylko teksty literackie, ale także będzie służyło poszerzeniu świadomości językowej. Należy urozmaicać zakres metod aktywizujących. Prelegentka zasugerowała tu na przykład *world cafe*, pomysł na szkatułkę z wyrazami czy drzewo znaczeń. Obstaje przy lekcjach z wykorzystaniem słownika w wersji papierowej bądź elektronicznej. Ciekawe według niej ćwiczenia to te powiązane z konkretnym słowem. Tutaj padła propozycja napisania scenariusza filmowego, w którym „to słowo” odegra główną rolę. Inny przykład metodyczny wiąże się z warsztatami dziennikarskimi, ale skupionymi wokół umiejętności tworzenia *newslettera* czy internetowej wersji gazety klasowej. To formy atrakcyjne dla współczesnej młodzieży, dlatego warto wzbogacać lekcje o tego typu pomysły. Podsumowując swoje wystąpienie, Barbara Matusiak zachęcała do twórczego wykorzystywania mediów w praktyce szkolnej.

O tym, jak przydatne mogą być media w zachęcaniu młodzieży do aktywnego uczestnictwa w lekcji, przekonywali wszyscy prelegenci. Mogą one inspirować uczniów i nauczycieli do codziennej pracy z lekturą i językiem.

V Uroczysty Kongres Polonistów i Bibliotekarzy był ciekawym przeżyciem. Pozwolił na wymianę doświadczeń, zainspirował i zachęcił do szukania nowych pomysłów w dydaktyce szkolnej – przy wykorzystaniu wielu możliwości, jakie oferuje świat technologii i cyfryzacji.

Joanna Przeobrażeńska

Nauczycielka języka polskiego w XIV Liceum
Ogólnokształcącym z Oddziałami Dwujęzycznymi
w Szczecinie.

Klaudia Szostak

Nauczycielka języka polskiego w Szkole Podstawowej nr 53
im. Fryderyka Chopina w Szczecinie.

Lista (nie)obecności

Waldemar Howil

Ilu polskich noblistów potrafisz wymienić?

W październiku ubiegłego roku Olga Tokarczuk otrzymała Literacką Nagrodę Nobla. Tym samym weszła w poczet polskich laureatów tego najbardziej znanego na świecie wyróżnienia dla wybitnych twórców. Kiedy zapytać przypadkowego ucznia o to, iloma laureatami Nagrody Nobla może się poszczycić Polska, z dużym prawdopodobieństwem można założyć, że wymienieni zostaną: Sienkiewicz, Reymont, Miłosz, Szymborska, Skłodowska-Curie i Wałęsa.

Zastanówmy się jednak, na czym polega ich polskość? Jeżeli przyjmiemy, na przykład, że wszyscy mieli obywatelstwo polskie, to niestety musielibyśmy zrezygnować ze Skłodowskiej-Curie, ponieważ „nasza” noblistka w takim sensie ani przez moment nie była Polką. Dlaczego więc tak bardzo szcycimy się tym, że była pierwszą laureatką i jako pierwsza (i jedyna) otrzymała tę nagrodę z dwóch dziedzin nauki? Może więc kryterium zamieszkania powinno decydować

o tym, czy uznajemy laureata Nagrody Nobla za „polskiego noblistę”? I tu znów pojawia się problem, bowiem już nie tylko Skłodowska-Curie nie mieszkała na terenie Polski w momencie otrzymania nagrody, ale i Czesław Miłosz większość swojego dorosłego życia spędził na emigracji. Poza tym, które terytorium – z uwzględnieniem historii – uznać za Polskę? Czy Czesław Miłosz pochodzi z polskiej, czy litewskiej wsi, skoro Szetejnie znajdują się obecnie na terenach należących do Litwy?

W świetle tych wątpliwości wydaje się, że problemów nie sprawia jedynie Lech Wałęsa, który urodził się na terenie Polski, spędził tu całe dotychczasowe życie i można założyć, że w tej kwestii, w dającej się przewidzieć przyszłości, nic się nie zmieni.

Mamy więc siedmioro polskich noblistów, o których uczą podręczniki i których możemy wymienić jednym tchem.

Niestety, lista polskich noblistów jest jednocześnie jaskrawym przykładem tego, kogo w Polsce uznaje się za Polaka, a kogo za Polaka uznać już nie można, albo kogo uznanie za rodaka przychodzi z trudem. Wystarczy sobie przypomnieć, co można było usłyszeć i przeczytać o Oldze Tokarczuk, z którą środowiska prawicowe mają niebywały kłopot. Wśród ich przedstawicieli można znaleźć takich, którzy wyrażali się o niej jako o „antypolskiej” i „antykatolickiej” pisarce, co *de facto* sprawa, że wykluczali ją z polskiej wspólnoty. Dla wielu bowiem „polskość” i „katolickość” to pojęcia, które ze sobą są powiązane w sposób nierozzerwalny.

Zdaję sobie sprawę, że nie jest to mainstreamowe podejście, co nie zmienia faktu, że zostało głęboko zakorzenione w polskiej tradycji. Tradycji, która (nawiasem mówiąc) jest określana jako ta tolerancyjna, otwarta, „bez stosów”. Niestety, w pewnych aspektach życia społecznego jak na tacy widać jednak pewien zgrzyt w tym cudownie wyidealizowanym obrazie wykreowanym przez nas samych. Takim zgrzytem jest właśnie to, których spośród laureatów nagrody Nobla uznajemy za polskich. Do listy wymienionych już nazwisk można bowiem spokojnie dołączyć kilka dodatkowych, których jednak nie znajdziemy w oficjalnych zestawieniach.

W 1995 roku Pokojową Nagrodę Nobla otrzymał na przykład Józef Rotblat – polski fizyk. Jest znany z dwóch rzeczy: stworzenia pierwszej bomby atomowej i ruchu pacyfistycznego naukowców o nazwie Pugwash. Rotblat urodził się w Warszawie w 1908 roku i mieszkał w swojej ojczyźnie aż do wybuchu drugiej wojny światowej. W Polsce uzyskał tytuł magistra z fizyki, a jego mentorem – co ciekawe – był profesor Ludwig Wertenstein, asystent Marii Skłodowskiej-Curie i prekursor polskiej fizyki jądrowej. Można więc powiedzieć, że jego losy są bardzo podobne do losów Czesława Miłosza, z tą jednak różnicą, że Miłosz jest „polskim noblistą”, a Rotblat w powszechnej świadomości nim nie jest.

Dlaczego? Zapewne z tego samego powodu, co Isaak Bashevis-Singer, który otrzymał Literacką Nagrodę Nobla w roku 1978. Dostał ją już na emigracji, mieszkając w Stanach Zjednoczonych, do których co prawda wyjechał na stałe w 1935 roku, jednak wciąż czuł się Polakiem i o Polsce pisał. Niestety, Polakiem w powszechnej opinii nie jest.

Obaj wymienieni wyżej laureaci Nagrody Nobla są Żydami, co rozluźnia ich związek z polską historią. Nie do końca są nasi, nie są „kryształowo” polscy, a już na pewno nie tak polscy, żeby uczyć o nich w szkołach, żeby wymieniał ich nazwiska w tym samym szeregu, co Tokarczuk, Szymborską, Wałęsę...

Poza tym jedynym kryterium nie istnieje, jak mi się wydaje, żadne inne, które stawia Rotblata oraz Singera (a także kilku jeszcze innych, równie przemilczanych) poza listą „polskich noblistów”. Takie przemilczenie wiele mówi o naszej polskości i jej rozumieniu. Wiele też mówi o nas, jako Polakach, którzy jednocześnie negują swój antysemityzm i ten antysemityzm pielęgnują.

Czy coś się zmieni w najbliższym czasie i zaczniemy mówić o Rotblacie, Singerze, Chaimie, Reichsteinie, Waksmanie, Chrapaku, Peresie... i innych, którzy mieli polskie korzenie, że są „polskimi noblistami”? Raczej nie. Pewnie pozostaną w naszej świadomości „szwajcarskimi”, „niemieckimi”, „amerykańskimi” noblistami. I zawsze znajdzie się dowód na to, że wykluczenie ich z polskości jest zasadne. Chyba że zaczniemy my, nauczyciele, o tym głośno mówić, nawet wbrew tak zwanym podstawom programowym, albo tak, żeby one nam w tym nie przeszkadzały.

Waldemar Howil

Nauczyciel języka polskiego, informatyki i etyki
w Szkole Podstawowej nr 3 w Gryfinie. Członek grupy
„Superbelfrzy RP”.

Indywidualne tempo

Ewa Zakrzewska

Rola zabaw i gier dydaktycznych w prognozowaniu rozwoju ucznia

Jednym z najważniejszych celów edukacji wczesnoszkolnej jest rozwój osobowości dziecka na miarę indywidualnych zdolności. Dziecko nieustannie się kształtuje i zmienia, dlatego zadaniem nauczyciela jest poznanie jego możliwości intelektualnych, aby właściwie stymulować rozwój i stwarzać odpowiednie warunki do samorealizacji. W edukacji dziecka musi się znaleźć miejsce nie tylko na zdobywanie wiedzy i umiejętności, ale również na wyzwalanie potencjału twórczego

i przeżywanie własnych osiągnięć. Rozwój dokonuje się na drodze uczenia się poprzez działanie, poznawanie, doświadczanie, a także zaspokajanie ciekawości świata. Ma charakter indywidualny, przebiega w różnym tempie i rytmie, a jego efekty zależą w dużym stopniu od różnorodnych uwarunkowań zewnętrznych i wewnętrznych – między innymi od predyspozycji, możliwości intelektualnych. Nie bez znaczenia pozostaje również wpływ środowiska wychowawczego.

Matematyka – dla jednych królowa nauk, dla innych senny koszar, a dla mnie – od zawsze najłatwiejszy przedmiot szkolny, jedyny, którego nigdy nie musiałam się obawiać. Wszystko w matematyce, od początku do końca, było dla mnie jasne, logiczne i zrozumiałe. Każde trudniejsze zadanie traktowałam jak zagadkę lub rozrywkę umysłową – uczenie się matematyki było po prostu moją pasją, a nie byłą i nie jestem matematycznym geniuszem. Ta pasja i hobby zaprowadziły mnie na studia matematyczne i były to dla mnie najpiękniejsze lata – mogłam wtedy robić to, co naprawdę lubiłam. Dlaczego o tym piszę? Bo uważam to za jedną z podstawowych cech, które powinien posiadać każdy nauczyciel – pasję i zainteresowanie własnym przedmiotem, inaczej będzie niewiarygodny w oczach uczniów. Tylko wielbiciel przedmiotu – w tym wypadku matematyki – może wzbudzić zainteresowanie, a nawet zamiłowanie do jego nauki, zaciekać nim do końca życia.

Następstwo ogniw

W trosce o prawidłowy rozwój dziecka, które w okresie wczesnoszkolnym powinno być wciąż motywowane do zdobywania nowych doświadczeń i wykorzystywania własnych możliwości, nauczyciel powinien poszukiwać odpowiedzi na takie pytania, jak: kim jest uczeń? Jaki ma zasób wiedzy, doświadczeń i umiejętności? Jak wyzwolić jego potencjał twórczy, wspierać indywidualny rozwój, stymulować intelekt i emocje? Jak rozwiązywać problemy i trudności w procesie jego rozwoju?

Odpowiedzi na te pytania dostarcza między innymi diagnoza pedagogiczna. Jej celem jest poznawanie i rozpoznawanie możliwości umysłowych, zdolności i trudności w nauce dziecka oraz przewidywanie rozwoju osiągnięć. Stanowi ona dla nauczyciela drogowskaz w podejmowaniu działań stymulujących, terapeutycznych

i naprawczych, a także ułatwia dokonanie prognozy pedagogicznej.

Zdaniem Urszuli Grucy-Miąsik, nie należy oddzielać diagnozy od prognozy, ponieważ niemożliwa jest racjonalna prognoza bez zbadania i wyjaśnienia stanu rzeczy ją poprzedzającego. Zgodnie z jej teorią prognoza „(...) polega na przewidywaniu działania w przyszłości prawidłowości dotychczasowego rozwoju zbadanego procesu czy stanu rzeczy”¹.

Prognozowanie powinno opierać się na założeniu, że rozwój to „(...) łańcuch procesów rozgrywających się w czasie, złożony z wielu ogniw. Ogniw mogą się różnić u poszczególnych jednostek, lecz następstwo ogniw jest stałe”². W procesie rozwoju obserwuje się „(...) ciąg następujących po sobie zmian i wchodzenie w kierunku zwiększonej złożoności i dojrzałości w coraz wyższą fazę, przy czym każda z nich charakteryzuje się odrębnymi właściwościami”³.

Jeżeli nauczyciel przyjmuje takie założenia prognozy pedagogicznej, to w procesie nauczania-uczenia się na etapie wczesnoszkolnym powinien wykorzystywać metody aktywizujące, ponieważ występują w nich aspekty kształcenia wielostronnego i pobudzają różne sfery osobowości dziecka. Jedną z takich metod stanowią gry dydaktyczne. Odpowiednio dobrane do sytuacji edukacyjnych i zamierzonych celów kształcących i wychowawczych pozwolą uczącemu ocenić dynamikę rozwoju ucznia, a także prognozować dalsze jego osiągnięcia, czyli możliwość przejścia na coraz wyższy poziom umiejętności i sprawności wymaganych w programie kształcenia zintegrowanego.

Motywacja i samodzielność

W trakcie zabaw i gier dydaktycznych dziecko uczy się przez poznawanie, przeżywanie i działanie. Musi się bowiem wykazać zarówno aktywnością percepcyjną (poznanie bezpośrednie,

poznanie za pomocą zmysłów), jak i aktywnością asymilacyjną (przyswajanie, zwłaszcza pamięciowe), a także aktywnością eksploracyjną, czyli odkrywaniem nowych elementów wiedzy (czynności odtwórcze i twórcze). Poza tym zabawy i gry dydaktyczne pobudzają aktywność sensomotoryczną, emocjonalną i werbalną.

W edukacji wczesnoszkolnej szczególnie znaczenie w prognozowaniu rozwoju dziecka mają zabawy i gry poznawcze, nazywane przez niektórych pedagogów rozrywkami umysłowymi albo zagadkami. Należą do nich: rebusy, szarady, układanki, krzyżówki, rozsypanki, anagramy, uzupełnianki, eliminatki. Służą one gromadzeniu materiału poznawczego, są też formą utrwalenia i operowania zdobytymi wiadomościami i umiejętnościami. Kształcą również takie sprawności umysłowe, jak: spostrzegawczość, koncentracja uwagi, myślenie analityczne i syntetyczne. Motywują do pokonywania trudności oraz do samodzielnego wysiłku umysłowego. Pomagają w przewidywaniu osiągnięć dziecka, między innymi w zakresie: techniki czytania, czytania ze zrozumieniem, bogacenia słownictwa, poprawnej pisowni wyrazów, techniki rachunkowej, określania stosunków wielkościowych, a także są przydatne w prognozowaniu potencjału twórczego.

Repertuar gier i zabaw dydaktycznych, które mogą być wykorzystywane w kształceniu zintegrowanym, jest bogaty i różnorodny. Przykłady gier można znaleźć w poradnikach metodycznych, ale nauczyciel musi świadomie dokonać ich wyboru w zależności od zamierzonych w procesie edukacji celów poznawczych, kształcących i wychowawczych oraz dostosować je do indywidualnych możliwości intelektualnych dziecka. Tylko wówczas uczący będzie w stanie ocenić stopień opanowania wiedzy i umiejętności zawartych w podstawie programowej kształcenia ogólnego oraz ustalić czynniki negatywnie wpływające na efekty procesu uczenia się.

Zabawy i gry dydaktyczne pozwalają nauczycielowi prześledzić kolejność zmian w procesie rozwoju dziecka, a tym samym przewidywać przebieg i wyniki dalszej edukacji. I tak na przykład nieopanowanie umiejętności analizy i syntezy słuchowo-wzrokowej liter i wyrazów znacznie spowolni naukę czytania i pisanie, zaś bez rozpoznawania związków przyczynowo-skutkowych uczeń nie zrozumie pojęć i operacji matematycznych. W takich przypadkach nauczyciel powinien poszukiwać sposobów wyeliminowania tych trudności, aby wyrównać szanse dziecka w dalszej edukacji.

Stymulowanie rozwoju

Kolejność zmian w procesie rozwoju dziecka na etapie kształcenia zintegrowanego uczący może prześledzić podczas rozwiązywania zagadek umysłowych, które wymagają opanowania kilku umiejętności i sprawności. Przykładem może być eliminatka. Jej rozwiązanie polega na eliminowaniu liter składających się na wyrazy, których znaczenie należy odgadnąć na podstawie kilku informacji. Uczeń, rozwiązując tę zagadkę, musi wykonać łańcuch czynności, a każda czynność wymaga zastosowania innej umiejętności lub sprawności. Konieczna jest umiejętność czytania, wiedza z zakresu edukacji przyrodniczej, znajomość reguł ortograficznych i pisowni, umiejętność analizy i syntezy oraz czytania ze zrozumieniem. Niewłaściwe wykonanie jednej z czynności utrudni albo uniemożliwi rozwiązanie zagadki. Zadaniem nauczyciela jest wspieranie dziecka w pokonywaniu napotkanych trudności. Mogą to być czynności o charakterze motywującym do transgresji i kreatywności, czynności kontrolujące – mające na celu bieżącą weryfikację działań ucznia lub też czynności korektywne – modyfikujące drogę prowadzącą do osiągnięcia zamierzonego wyniku.

Samodzielne układanie zagadek umysłowych przez dziecko w procesie kształcenia zintegrowanego pozwoli uczącemu ocenić opanowanie wzajemnie powiązanych operacji myślowych, typu: analiza, synteza, abstrahowanie, klasyfikacja, a także prognozować rozwój jego potencjału twórczego, a mianowicie: płynność, giętkość i oryginalność myślenia. Płynność to łatwość wytwarzania w określonym czasie słów, pomysłów. Można badać płynność słowną (podanie jak największej liczby słów zaczynających się lub kończących na daną literę), płynność skojarzeniową (podanie jak największej liczby synonimów danych wyrazów), płynność ekspresyjną (układanie zdań zawierających dane słowa). Giętkość myślenia jest zdolnością wytwarzania różnorodnych pomysłów, a oryginalność myślenia to zdolność tworzenia odpowiedzi, które są adekwatne do konkretnej sytuacji zdaniowej.

Gry i zabawy dydaktyczne, wykorzystywane w edukacji wczesnoszkolnej, pozwalają na obserwację różnych sfer rozwojowych dziecka, a mianowicie:

- motorycznej, czyli sprawności ruchowej i manipulacyjnej;
- umysłowej, czyli zakresu wiadomości i stopnia operacji myślowych;
- emocjonalno-społecznej, czyli reakcji na różne sytuacje, jak: wypełnianie ról społecznych w grupie, współdziałanie i współpraca, słuchanie innych, koncentracja na czynnościach, kontrolowanie emocji;
- temperamentu, czyli ruchliwości, aktywności, bierności.

Obserwacja dziecka w różnych sytuacjach zadaniowych podczas zabaw i gier dydaktycznych pozwala nauczycielowi monitorować jego rozwój psychoruchowy, intelektualny, społeczny i emocjonalny. Jest narzędziem poznawania i rozumienia dziecka, podstawą do prognozo-

wania jego rozwoju, a także opracowania przez uczącego wskazań edukacyjnych, które będą stymulowały, wspierały i wspomagały jego potencjalny rozwój.

Zabawy i gry dydaktyczne, po odpowiedniej modyfikacji uwzględniającej tempo rozwoju i możliwości intelektualne, można również wykorzystać w pracy wyrównawczej z dziećmi, które mają trudności w opanowaniu przewidzianych w podstawie programowej umiejętności.

Podsumowując, zabawy i gry dydaktyczne są jedną z ważniejszych metod aktywizujących w edukacji wczesnoszkolnej, ponieważ przyczyniają się do wszechstronnego rozwoju dziecka, są narzędziem w rozwijaniu umiejętności ucznia się, przyspieszają procesy rozwojowe, pozwalają dokonać oceny jego aktualnych osiągnięć i na tej podstawie skutecznie prognozować dalszy rozwój.

Przypisy

- ¹ U. Gruca-Miąsik, *Prognoza pedagogiczna*, w: *Encyklopedia Pedagogiczna XXI wieku*, t. IV, Warszawa 2005, s. 949.
- ² A. Bąbka, *Diagnoza rozwoju ucznia rozpoczynającego edukację szkolną. Materiały pomocnicze dla nauczycieli kształcenia zintegrowanego*, Częstochowa 2004, s. 4.
- ³ S. Włoch, A. Włoch, *Diagnoza całościowa w edukacji przedszkolnej i wczesnoszkolnej*, Warszawa 2009, s. 18.

Ewa Zakrzewska

Nauczycielka edukacji wczesnoszkolnej w Szkole Podstawowej nr 1 w Stargardzie.

Przyszłość (jeszcze) nie istnieje

Małgorzata Roszak

„Budząca się szkoła” jako idea zmiany paradygmatu edukacji

W 2007 roku Margret Rasfeld rozpoczęła w berlińskim Gimnazjum Ewangelickim realizację eksperymentu pedagogicznego „Budząca się szkoła”. Głównym celem tego projektu była zmiana paradygmatu edukacji oraz stworzenie placówki, która w autentyczny sposób umożliwi rozwijanie potencjału tkwiącego w uczniach i przygotowuje ich do życia. Przy opracowaniu założeń, celów i programu przedsięwzięcia Rasfeld

współpracowała ze Stephanem Breidenbachem, profesorem prawa, dziekanem na Uniwersytecie Viadrina, i Geraldem Hütherem, profesorem neurobiologii z Getyngi. Chcąc upowszechnić swój projekt, Rasfeld i Breidenbach napisali książkę *Budząca się szkoła*, która została przetłumaczona również na język polski. Pozycja jest dostępna w Bibliotece Pedagogicznej im. Heleny Radlińskiej w ZCDN-ie.

„Czego już dziś musimy się uczyć dla przyszłości?” – to pytanie otwierało wystąpienie Margret Rasfeld zatytułowane *Edukacja dla zrównoważonego rozwoju – zmiana paradygmatu* na konferencji „Od nauczania do uczenia się. Kierunki rozwoju współczesnej edukacji”, którą ZCDN zorganizował 17 września 2019 roku z okazji 70-lecia systemu doskonalenia nauczycieli w województwie zachodniopomorskim.

W swoim wystąpieniu Rasfeld wskazała główne kompetencje przyszłości: elastyczność uczenia się, empatię i umiejętność zmiany myślenia, otwartość na zmiany, wykazywanie własnej inicjatywy, kreatywność, zdolność nawiązywania relacji i pracy w zespole, poczucie odpowiedzialności za siebie i innych, odwagę w działaniu. Jej zdaniem współczesna szkoła musi przejść od kultury nauczania do kultury uczenia się, by sprostać wyzwaniom przyszłości. Nie da się jednak wprowadzić pożądanych zmian bez czynnego udziału wszystkich zainteresowanych – uczniów, nauczycieli, rodziców i dyrektorów szkół. Rasfeld podkreśliła, że najważniejsze są: relacje, współdziałanie, odpowiedzialność, poczucie sensu, wzajemny szacunek i zaufanie. Wskazała również zjawiska, które stanowią obciążenie i zagrożenie dla nowych prądów we współczesnej oświacie, wśród nich wymieniając przekonanie, że liczy się tylko sukces, a najważniejsze wartości to większa wydajność i konkurencyjność na rynku pracy. Takie postawy, wynikające z wielowiekowej tradycji, prezentują zarówno rodzice, jak i niektórzy nauczyciele.

Czym więc od powszechnej odróżnia się szkoła, która „się obudziła”? Nie ma jednego obowiązującego modelu „Budzącej się szkoły” – każdy może kształtować ją według potrzeb własnego środowiska (uczniów, nauczycieli, rodziców). Fundament „Budzącej się szkoły” to przekonanie, że uczeń jest opowiedziany za swój sukces edukacyjny – dlatego wybiera przedmioty, których będzie się uczył w określonym wymiarze. Nauczyciel zaś przede wszystkim towarzyszy mu

w procesie edukacyjnym – jest tutorem. Natomiast podstawą rozwoju potencjału, który ma w sobie każde dziecko, są relacje.

Czego potrzebuje dzisiejsza szkoła? Odpowiedzi mogą być różne, w zależności od tego, kto ich udziela – uczniowie, nauczyciele, rodzice czy władze państwowe lub oświatowe. „Świat się zmienia, a szkoła nie” – tak twierdzi wiele osób. Według mnie to nieprawda. Widzę duże zmiany zachodzące w szeroko pojętej kulturze edukacyjnej. Choć w szkole pracuję od wielu lat, nie wpadam w rutynę – wciąż szukam, czytam i wprowadzam zmiany w sposobie pracy z uczniami. Czy to wystarcza? Albert Camus powiedział, że „szkoła przygotowuje dzieci do życia w świecie, który nie istnieje”. Zgadza się, ponieważ ten świat – ich świat – zostanie w niedalekiej przyszłości dopiero stworzony przez nich samych. Nie jesteśmy więc w stanie przygotować w pełni młodego człowieka do funkcjonowania w rzeczywistości, której jeszcze nie ma. Myślę, że powinniśmy przekazać młodym ludziom tyle, ile jesteśmy w stanie, czyli obraz świata „tu i teraz”, z jego zaletami i wadami, a także umiejętność rozpoznawania dobra i zła, dać im odwagę do działania.

A my – nauczyciele? Znajdźmy w sobie odwagę do wprowadzania zmian. Mimo wszystko! Bardzo zaintrygowały mnie dwa zdania ze wstępu do polskiego wydania *Budzącej się szkoły*. Pozwalam sobie przytoczyć je za dr Marzeną Żylińską, by poddać je pod rozprawę: „Nauka może być aktem przymusu lub aktem woli. Opowiadając się za jednym lub drugim, determinujemy rozwój naszych dzieci”.

Małgorzata Roszak

Nauczycielka języka polskiego w Szkole Podstawowej nr 48 im. Kawalerów Orderu Uśmiechu w Szczecinie. Nauczycielka konsultantka ds. języka polskiego w szkołach podstawowych w Zachodniopomorskim Centrum Doskonalenia Nauczycieli. Przewodnicząca szczecińskiego oddziału Stowarzyszenia Nauczycieli Polonistów.

Odyseja Umysłu

Justyna Wołoszyk-Brzezińska

Program edukacyjny, który uczy marzyć, myśleć i tworzyć

Jestem nauczycielką języka polskiego w szkole podstawowej (wcześniej uczyłam w gimnazjum). Od wielu lat prowadzę zajęcia dla dzieci „Techniki uczenia się”. Podczas cotygodniowych spotkań uczymy się myśleć krytycznie, rozwijać myślenie dywergencyjne i kreatywność, odkrywamy talenty. Niniejszy tekst pisałam z perspektywy trenerki. Z jednej strony zdaję sobie sprawę, że są to dosyć ogólne informacje, z drugiej – chodziło mi o to, żeby

pokazać, jak organizacyjnie wygląda praca z programem edukacyjnym Odyseja Umysłu. Kiedy ja zaczynałam przygodę z tym projektem, musiałam sama wszystko sprawdzać, szukać informacji, co było dość wymagającym i czasochłonnym zadaniem. Mam nadzieję, że ci, którzy w przyszłym roku będą chcieli zostać Trenerami Odysei i prowadzić grupę uczniów w swoich szkołach, skorzystają z niektórych porad i refleksji, które wynotowałam.

Twórcze podejście

Swoją przygodę z Odyseją rozpoczęłam od udziału w szkoleniu, podczas którego poznałam założenia programu i ćwiczyłam umiejętności potrzebne do prowadzenia grupy uczniów. Intensywne zajęcia dały mi możliwość poznania kolejnych etapów zmagania z postawionym przed grupą problemem. Niczym Odyseusz wyruszyłam w trzydniową podróż, aby rozpocząć drogę rozwijania kreatywności, przełamywania schematów i uczenia się współpracy z innymi. Przejście przez ten etap jest konieczne, by otrzymać Certyfikat Trenera, który daje uprawnienia do prowadzenia grupy szkolnych Odyseuszy. Do zadań trenera, między innymi, należą: współpraca z dyrektorem placówki, w której działa drużyna, ustalenie współpracy z rodzicami Odyseuszy, dopilnowanie rejestracji członkostwa, czyli uczestnictwa placówki w programie, i odebranie materiałów niezbędnych do realizacji programu, takich jak: „Książeczka Trenera”, „Treningowe Problemy Spontaniczne”, „Przewodnik Odysei Umysłu. Problemy Długoterminowe”.

Jedno z najtrudniejszych zadań to wyłonienie członków drużyny, w której skład powinno wchodzić około 5–7 uczniów. W mojej szkole konieczne było przeprowadzenie konkursu, ponieważ zgłosiło się zbyt wielu kandydatów. Zadania postawione przed dziećmi miały pokazać, kto najlepiej poradzi sobie z wyzwaniami wymagającymi twórczego, nieszablonowego podejścia do zagadnienia. Uczniowie musieli również udowodnić, czy potrafią pracować w zespole.

Kolejny etap pracy w ramach realizacji programu polega na ustaleniu harmonogramu spotkań. Moi Odyseusze spotykają się raz w tygodniu, a kilka tygodni przed konkursowymi eliminacjami – dwa razy w tygodniu (sobotnie spotkania trwają wtedy około 3–4 godzin).

Najlepsze rozwiązania

Podczas pierwszego spotkania trzeba uzmysłowić dzieciom, jak ważne jest, by Odyseusze pracowali

– jako grupa – samodzielnie, by nie korzystali z tak zwanej Pomocy z Zewnątrz (na przykład ze strony rodziców). Ich zadaniem jest jedynie wspieranie swoich dzieci, zachęcanie do regularnego przychodzenia na spotkania drużyny. W *Książeczce Trenera* można przeczytać: „Z Pomocą z Zewnątrz mamy do czynienia w sytuacji, w której ktokolwiek inny niż członkowie drużyny wymyślił bądź wykonał jakikolwiek oceniany element rozwiązania Problemu Długoterminowego (materialny lub nie)”. Odyseusze muszą zrozumieć, że w każdym z nich drzemie ogromny potencjał twórczy, a ich zadaniem jest odkrywanie go podczas wspólnej pracy. Należy podkreślać, że samodzielne dojście do rozwiązania uczy doceniania własnych umiejętności.

Integrowanie nowej grupy Odyseuszy to czasochłonne zadanie. Występ konkursowy nie tylko pokazuje, jak drużyna rozwiązała postawione przed nią zadanie, ale też daje obraz zespołu, po występie bowiem każda drużyna krótko przedstawia w rozmowie z Sędziami przebieg kilkumiesięcznej współpracy. To, w jaki sposób Odyseusze mówią, jak się do siebie zwracają, ma niebagatelny wpływ na odbiór i wizerunek drużyny.

Odyseusze rozpoczynają wspólną przygodę w wrześnie. Praca zaczyna się od treningu nad Problemami Spontanicznymi (słownymi, manualnymi lub słowno-manualnymi). To właśnie w te ćwiczenia wpisana jest formuła: kto nie chce współpracować, naraża na straty całą drużynę. Takie wstępne zadania bardzo integrują grupę i motywują wszystkich do szukania jak najlepszych – dla całej ekipy – rozwiązań.

Moja grupa Odyseuszy szybko zrozumiała, że sprawna współpraca ułatwia osiągnięcie wyznaczonego celu. Myślę, iż był to jeden z elementów, który zadecydował o naszym zwycięstwie. W książce Aleksandry Szyłło *Godzina wychowawcza. Rozmowy o polskiej szkole*, będąca zapisem rozmów z ludźmi, którzy rozumieją konieczność zmian w polskiej edukacji, jeden z rozmówców, Jacek Strzemieczny, mówi, jak ważne jest kładzenie nacisku na budowanie relacji:

„Za bardzo przygotowujemy do indywidualistycznego życia, orientujemy na indywidualny sukces. Już od dawna Noble to zespoły. A bezpieczeństwo, które tak odmieniamy przez wszystkie przypadki, to nie pieniądze, tylko relacje. My o innych, inni o nas” (s. 82). Odyseja to właśnie budowanie relacji, które prowadzą do stworzenia wspólnego projektu.

Kluczowe umiejętności

Gdy drużyna otrzyma Pakiet Członkowski, rozpoczyna się praca nad Problemem Długoterminowym. Odyseusze przez kilka tygodni przygotowują 8-minutowy występ. Należy wybrać jeden z pięciu zaproponowanych Problemów Długoterminowych. Od tego momentu praca Trenera ogranicza się do zadawania pytań, na które Odyseusze odpowiadają, jednocześnie zastanawiając się nad rozwiązaniami. Trener nieustannie zachęca do pracy nad wybranym tematem i czuwa nad bezpieczeństwem w czasie przygotowywania konkursowego zagadnienia. Odyseusze sami przydzielają sobie role, wyznaczają zadania. Bardzo ważne jest, by sprawdzać wykonanie powierzonych obowiązków i narzucać tempo pracy. Trzeba też przypominać o ograniczeniach, które wyznaczają organizatorzy konkursu (są one związane między innymi z limitem czasu oraz poniesionych kosztów). Należy przypominać, jakie wymagania stawiane są postaciom występującym w spektaklu, za co drużyna otrzymuje punkty, jak ma wyglądać scenografia.

Tworzenie całości wystąpienia daje uczestnikom możliwość odkrycia i zaprezentowania swoich umiejętności, talentów, pokazania cech, które przyczyniają się do wzmocnienia wiary we własne możliwości. Dla Trenera, który staje się obserwatorem, to też bardzo ważna lekcja „bycia w tle”. Moim zdaniem to najtrudniejsze zadanie, bo polski nauczyciel często nie potrafi stanąć z boku, by dać uczniom możliwość tworzenia projektów, a nade wszystko pozwolić na samodzielne działania.

Praca zespołu skupia się na stworzeniu scenariusza 8-minutowego przedstawienia, w tym sceno-

grafii, strojów, a następnie zaprezentowanie go przed Sędziami. Na stronie internetowej Odysei Umysłu napisane jest: „Świat zmienia się coraz szybciej... Nowej wiedzy przybywa (...). Nie da się wszystkiego nauczyć na pamięć – zaś to, co jeszcze niedawno wydawało się pewne, już wkrótce może okazać się nieaktualne. Postęp naukowo-techniczny ma niespotykane dotąd tempo, a społeczeństwo jutra będzie inne niż współczesne (...). Jeśli młodzi ludzie przekonają się, że osobisty sukces fajniej i prościej osiągnąć w grupie – będą chcieli i umieli współdziałać z innymi. Jeśli zrozumieją, że jedno zadanie można rozwiązać na różne sposoby – uświadomią sobie, że każdy problem to wyzwanie, a nie przeszkoda”.

Podczas trwających kilka miesięcy spotkań (od września 2019 roku do marca 2020 roku) moi Odyseusze pokazali, jak wspaniale potrafią współpracować nad wspólnym zadaniem wymagającym twórczych rozwiązań. Przejście przez Eliminacje Regionalne i zakwalifikowanie się do Ogólnopolskiego Finału Odysei Umysłu – końcowego etapu krajowej edycji międzynarodowego konkursu edukacyjnego *Odysey of the Mind* 2019 – było przeżyciem, które już na zawsze zostanie w pamięci jej uczestników. W tym roku kolejny raz przystąpiliśmy do konkursowych zmagania. Od września wspólnie marzymy, myślimy i tworzymy, bo Odyseusze chcą nieustannie się rozwijać.

Justyna Wołoszyk-Brzezińska

Dyplomowana nauczycielka języka polskiego w Prywatnej Szkole Podstawowej „Prymus” w Kościerzynie. Ukończyła polonistykę oraz Podyplomowe Studium Dziennikarstwa na Uniwersytecie Gdańskim. Należy do sieci współpracy i samokształcenia nauczycieli pracujących kreatywnie KRET (Kreatywny Rozwój Edukacji Twórczej) działającej w Centrum Edukacji Nauczycieli w Gdańsku. Jest Certyfikowanym Trenerem Odysei Umysłu. Autorka artykułów do „Edukacji Pomorskiej”.

Od dedukcji do redukcji

Michał Brzezicki

Problematyka myślenia w sztuce i edukacji

Współczesny człowiek spotyka się z ogromną ilością różnorodnych bodźców, informacji i zjawisk, z którymi musi sobie poradzić, jakoś je „poukładać”, a do niektórych z nich – z racji wykonywanego zawodu lub zainteresowań – się odnieść. Mnogość źródeł rozmaitych danych może powodować trudności z poprawną interpretacją, doprowadzić do uczucia zagubienia. Problem ten często dotyczy młode osoby, które jeszcze nie mają ugruntowanych fundamentów swojego światopoglądu i wciąż szukają „drogi myślowej”. W ich wypadku chaotyczna podaż informacji może się okazać wielkim wyzwaniem. Warto jednak w procesie poszukiwań swoich poglądów pamiętać, że odrzucając tradycję – stajemy się tworem popkultury.

Co artysta miał na myśli?

Współczesny świat uczy nas, że odejście od tradycji nie jest niczym złym – niektórzy przekonują

wręcz, że bez jej balastu jesteśmy „mniej ograniczeni”. Idąc śladami tradycji, nierzadko jesteśmy nazywani konserwatystami zamkniętymi na nowoczesność.

Podobny problem można zaobserwować u twórców i osób zainteresowanych sztuką. Na wystawach sztuki współczesnej często przyglądamy się pracom, które większości widzów niewiele mówią. Potrzebny jest przy nich długi opis, żeby choć trochę zrozumieć sens dzieła. Absolwenci szkół średnich, decydując się na studia na uczelniach artystycznych, mają do wyboru kierunki skupione właśnie na nowoczesnym podejściu do sztuki: multimedia, działania interdyscyplinarne czy performans. Do sztuki zaliczane są w ten sposób działania i doświadczenia mające często o wiele więcej wspólnego z socjologią niż ze sztuką.

Idealnym przykładem takiego podejścia jest Marina Abramović, nazywana artystką intermedialną. Jedną z jej bardziej znanych „prac” jest per-

formans, podczas którego siedziała bez ruchu na środku sali muzealnej, a naprzeciwko niej zasiadali kolejno odwiedzający muzeum. Jedni się śmiali, inni płakali, a serbska artystka wciąż trwała w bezruchu. Czy to faktycznie jest sztuka? Abramović nazywana jest wielką współczesną artystką, a jej performanse odbywają się w salach najbardziej znanych muzeów i domów sztuki. Czy nie jest to jednak bardziej badanie zachowań ludzkich, któremu bliżej do psychologii, niż sztuka?

Według słownikowej definicji sztuka jest działalnością lub umiejętnością artystyczną oraz ich efektami. Jest to coś, co wymaga specjalnego działania i specjalnych umiejętności, a efekt wiąże się z jakimiś wartościami – na przykład estetycznymi. W historii pojęcie to ewoluowało. Od starożytnego traktowania sztuki jako rzemiosła, przez średniowieczny podział na sztukę wyzwoloną i pospolitą, aż do uznania w XX wieku sztuki jako pojęcia otwartego. Jedną z jej wielu alternatywnych definicji, autorstwa Władysława Tatarkiewicza, brzmi: „Sztuka jest odtwarzaniem rzeczy, bądź konstruowaniem form, bądź wyrażaniem przeżyć – jeśli wytwór tego odtwarzania, konstruowania, wyrażania jest zdolny zachwycać, bądź wzruszać, bądź wstrząsać”.

Dochodzimy w ten sposób do wniosku, że dziś o tym, czy dany „wytwór” jest sztuką często decydują okoliczności, miejsce czy znajomości.

Myślenie jako proces twórczy

Taką sytuację doskonale obrazuje przypadek z wystawy *Look Again* w szkockiej galerii w budynku Sir Iana Wooda. Studenci, jak sami przyznają, z ciekawości, czy ktoś zwróci na to uwagę, zostawili w muzeum ananasa. Owoc po jakimś czasie został umieszczony w gablocie. Podobna sytuacja miała miejsce nie raz – sztuką stawała się część remontu w jednej z sal, gdzie miejsce pracy ograniczono taśmami zakazującymi wstępu, czy pozostawione przez sprzątaczkę narzędzia pracy. Sztuka współczesna nie ma ram, ograniczeń i nie można jej

przez to zaklasyfikować. Jedni widzą w tym potencjał, innym to wadzi.

W myśleniu, jak i w sztuce, ważne jest podejście do procesu twórczego. Ilu artystów – tyle metod traktowania tematu poddanego analizie. Dedukcja i redukcja są pojęciami filozoficznymi i stanowią część zagadnień logicznych. Dedukcja oznacza dochodzenie do zdania prawdziwego, z wykorzystaniem jedynie tych przesłanek, które również są prawdziwe. Dedukcja nie pozostawia miejsca na domysły czy niepewności. Redukcja natomiast jest czymś prawie odwrotnym. Jest to uprawdopodobniające myślenie, w którym zakładamy, że opieramy się na zawodnych przesłankach. W takim toku myślenia, na podstawie prawdziwych przesłanek, możemy dojść do fałszywych wniosków.

Oba powyżej opisane pojęcia można odnieść do sztuki i w jej kontekście rozpatrywać logikę podejścia do pracy twórczej. Dedukcja, jako praca od podstaw, w sztuce oznaczałaby budowanie fundamentów artystycznych umiejętności – zaczynając od analizy twórczości największych artystów, ich technik i prac. Zapowiadałoby to również pracę nad swoimi umiejętnościami w zakresie podstawowych dziedzin, jak rysunek, malarstwo i rzeźba. Dopiero po opanowaniu fundamentalnych umiejętności nastąpiłoby przejście do redukcji. Tutaj zaczęłaby się praca kreatywna, opierająca się głównie na odczuciach i emocjach, ale bazująca na wiedzy i zdobytych umiejętnościach. W ten sposób, na podstawie prawdziwych przesłanek, jakimi są nasze wyćwiczone zdolności, doszlibyśmy do niekoniecznie prawdziwych wniosków – obrazu rzeczywistości widzianego poprzez nasze emocje. Jest to jednak droga niełatwa i wymagająca. Musimy poświęcić czas na studiowanie klasycznych dziedzin sztuki, podjąć próby ich „kopiowania”, zanim zaczniemy tworzyć „własne” prace, na których od początku nam zależało. W wyniku ciężkiej, często nieprzynoszącej oczekiwanych efektów pracy możemy zrezygnować z tak obranej drogi rozwoju, zniechęcić się i przestać ćwiczyć.

Sztuka (niezupełnie) nowoczesna

W kontrze do takiej drogi staje współczesna sztuka, w której bardzo często pomija się pierwsze kroki i od razu przechodzi do pracy twórczej. Tego typu podejście można porównać do rozpoczęcia lektury, na przykład *Dziadów* Adama Mickiewicza, od przemiany Gustawa w Konrada w *Wielkiej Improwizacji*, albo – odnosząc się do bardziej współczesnych wytworów kultury – czytać czy oglądać serię *Zmierzch* od momentu, gdy główna postać przemienia się w wampira.

Studiując na uczelni artystycznej, przyglądałem się działaniom studentów kierunków multimedialnych. Ktoś, w ramach pracy twórczej, wkładał sobie palce do gardła i wymiotował, wszystko nagrywając, ktoś inny rozbierał się do naga przed galerią handlową w centrum miasta, a jeszcze inna osoba chodziła po ulicy z związanymi oczami. Nie byli to studenci ostatnich lat, więc na pewno nie doszli do tego drogą dedukcji. Czy była to sztuka...? Trudno powiedzieć – dla mnie były to eksperymenty, bardziej związane z psychologią albo socjologią niż ze sztuką. Sam, mając kilka przedmiotów prowadzonych przez wykładowców z nowych mediów, miałem zderzenie z nowoczesnym podejściem do tego tematu. Na przykład na przedmiocie, który nazywał się „rysunek”, nie rysowaliśmy. Po wielogodzinnych rozmowach zaliczenie przedmiotu przyjęło formę nagrania audio z różnymi reakcjami ludzi. Na „malarstwie” natomiast dostałem propozycję wycięcia sobie kawałka (własnej) skóry i sprawdzenia, jak będzie reagować na rozciąganie, suszenie itp. Drugą propozycją była całodobowa podróż jednym środkiem transportu miejskiego i obserwacja ludzkich zachowań. Ostatecznie „malarstwo” zaliczyłem, robiąc grę planszową z materiałów odzwierzęcych, takich jak kości, skóra czy krew. Czułem, że jest to coś kreatywnego, ale bliższe kreatywnemu myśleniu, a nawet bardziej wymyślaniu niż kreatywnej pracy artystycznej.

Dwa światy

Wszystko się rozwija i żyje, więc i sztuka zapisuje kolejne stronicie swojej księgi, które kiedyś staną się historią sztuki. Nic dziwnego nie ma więc w tym, że twórcy szukają wciąż czegoś nowego. Czy jednak nie jest tak, że w trakcie poszukiwań można za bardzo odejść od tematu i niepostrzeżenie zmienić dziedzinę? Przesadne przywiązanie do tradycyjnego nauczania sztuki, czerpanie przykładów tylko z klasyków może doprowadzić do pewnej pułapki powtarzania tego, co już było, lub do zniechęcenia się do pracy twórczej. Jednak bazowanie jedynie na nowoczesnych trendach i rozwiązaniach może spowodować odejście od sztuki. Artysta będzie nagrywać performans albo zamalowywać powierzchnię ekspresyjnymi pociągnięciami pędzla, a nie będzie w stanie naszkicować drzewa w parku. Moim zdaniem, tak jak człowiek powinien mieć wykształcenie podstawowe, by rozpocząć edukację na kolejnym etapie, tak i podstawowe wykształcenie w zakresie historii sztuki powinno charakteryzować każdego artystę. Bardzo często młodzi ludzie porównują swoją twórczość do dzieł Picassa. Ten artysta jednak nie zaczynał od takich prac, z jakich znamy go najbardziej. Jego twórczość obejmuje kilka etapów: tak zwany okres zielony, różowy i dopiero – kubizm. W każdym z nich pozwalał sobie na szerszą interpretację świata: wcześniej powstała *Rodzina arlekinów*, a dopiero później *Przyjaźń*.

O sztuce trzeba myśleć w szerokiej perspektywie i nie zamykać się ani na tradycję, ani na nowość. Jest to szczególnie istotne na początku artystycznej drogi, aby móc świadomie podjąć decyzję, jaką sztukę artysta chce tworzyć.

Michał Brzezicki

Projektant graficzny. Prezentował swoje prace na wystawach o zasięgu krajowym i międzynarodowym. Pracował jako nauczyciel zawodowy przedmiotów graficznych.

Pedagogika literatury

Część I

Jadwiga Szymaniak

Jak przywrócić radość czytania?

Do napisania tych rozważań skłania mnie nie tylko pamięć o latach mojej pracy nauczycielskiej, ale i doświadczenia wiążące się z opieką nad własnymi dziećmi, a potem wnukami. Wnuki dorastały już we współczesnej kulturze i choć niewiele różniły się wiekiem między sobą, dostrzegałam różnice. Może zawsze tak było, teraz jednak różnice zdają się pogłębiać. Jedne nadal czytały chętnie, inne szybko uzależniły się od komputera. Zaobserwować można było, jak stopniowo

stawały się mniej zdolne do dojrzałej pracowitości lub stawały się pracowite, ale tylko w jednej, ulubionej dziedzinie. Psychologowie zwracają uwagę, że wiele dzieci dorasta w „próżni”, ich rodzice czy wychowawcy zafascynowani są tolerancją i demokracją, a tak naprawdę dzieciom trzeba miłości i prawdy, norm moralnych, odpowiedzialności i dyscypliny¹. Współczesnym rodzicom ponadto, jak wskazują teoretycy, towarzyszy czasem lęk przed wychowywaniem.

Zmierzch literatury?

Kiedy przed laty, pod koniec ubiegłego wieku, usiłowałam zbierać materiały służące porównaniu stosunków dwóch kolejnych pokoleń – które dane mi było uczyć – do szkolnej lektury, doszłam do wniosku, że literatura, w tym klasyka, przy odpowiednich zabiegach może nadal uczyć doświadczania dobra. Zbliżać do rozumienia wartości, mimo że niektóre z nich obecnie są odbierane jako kontrowersyjne. Tym bardziej że lansowana przez media „otwartość na nowe” może zamykać na prawdy uniwersalne². Lektura, nie tylko obowiązkowa, ale i ta „do wyboru”, może dostarczyć poważnych tematów do rozmów i dyskusji, ukazać wzorce, mimo iż ostatnio wydają się one funkcjonować jako narzucone. „Dojrzałe wychowanie jest największym darem, jaki dorośli mogą ofiarować młodemu pokoleniu” – pisze słusznie psycholog Marek Dziewiecki³.

Książka może wiele zdziałać w rękach nauczycieli, rodziców, bibliotekarzy. Nie sprawdziła się do końca teza współczesnych filozofów, szczególnie Neila Postmana, o końcu ery druku⁴. Jednak troska, aby słowo nie zostało zastąpione czy wręcz wyparte przez potęgę obrazu – nadal istnieje. Wydaje się natomiast, że środki te mogą współistnieć i jak dotąd – próbować się uzupełniać. Są już zresztą książki bez słów, niektóre bardzo piękne, dotyczące na przykład znanych baśni czy mitów. Badacze podkreślają, że potrzebna jest w tym zakresie aktywna postawa rodziców i pedagogów, aby byli „na bieżąco” i starali się wybierać wytwory wartościowe, także artystycznie, bowiem takie też istnieją⁵. Znajomość tego, co czytają i w co grają dzieci, jest niezbędna – podkreśla pedagog Weronika Wojtanowska⁶. Ważne jest bowiem, żeby wiedzieć: kiedy zabronić, kiedy porozmawiać, a kiedy towarzyszyć.

Trzeba się zgodzić z hipotezą, że dzieci czytają dziś inaczej niż dawniej. Joanna Papuzińska, zasłużona badaczka czytelnictwa, podkreśla od

lat, że rośnie dystans młodych czytelników do treści, ich poczucie fikcji, świadomość (lub jej brak), że to tylko „na niby”⁷. Do lat 70. ubiegłego wieku rozwój kontaktów dorastającej młodzieży z książką przebiegał według pewnych faz (na przykład powieści „indiańskie”, przygodowe, podróżnicze, historyczne). Zwyczaje te uległy zmianie wraz z pojawieniem się alternatywnych form rozrywki i spędzania czasu wolnego. Na pracę pedagogiczną z książką coraz silniej wpływała też idea zakładająca potrzebę ożywienia procesu dydaktycznego poprzez zabawę i zajęcia kreatywne (plastyczne, teatralne, ruchowe), gdzie książka jest równorzędnym partnerem – zwraca uwagę Papuzińska. Wciąż jednak, szczególnie w odniesieniu do młodszych dzieci, wykorzystywane są takie formy pracy, jak opowiadanie baśni, głośne czytanie, a ze starszymi dziećmi – rozmowy o treści. Uwzględniały to zresztą kolejne wersje zaleceń programowych dla języka polskiego. Zmienia się też sama postać książki – jej forma. Równocześnie rozkwita książka dziecięca, polecana dla „czytelników” już od pierwszych miesięcy życia.

Lata 80. przyniosły sukcesy literatury fantasy (J.R.R. Tolkien, C.S. Lewis). Uważa się – nie wiem, czy słusznie – że apogeum zainteresowania tym rodzajem literatury mamy już za sobą. Niektórzy twierdzą nawet, że sukces cyklu o Harrym Potterze był łąbędzim śpiewem tego rodzaju twórczości⁸.

Przeszkodę w pielęgnowaniu zainteresowań czytelniczych najmłodszych stanowią mogą bariery językowe, często na tle zaniedbań środowiskowych w rodzinach, ale także być może „mechanizmy identyfikacji z bohaterem nie działają tak jak dawniej”⁹. Może jest to fragment szerszych procesów związanych nie tylko z literaturą.

Nadal formułuje się pewne pedagogiczne wymogi związane z literaturą dla młodzieży i dzieci – w utworach nie powinno być dyskryminacji czy indoktrynacji, psychologowie przestrzegają przed treściami mogącymi wywołać agresję.

*Na drodze socjalizacji literackiej
dużą rolę odgrywa książka
z obrazkami, szczególnie gdy
towarzyszy jej bliskość opowia-
dającej osoby. Uczestniczymy
wówczas w kreowaniu wspólnego
świata, tworzymy wspólnotę ze
słuchającym i stajemy się częścią
kulturowego dziedzictwa.*

Jaka więc jest rola dorosłych w „kontakto-
waniu” dzieci z książką? Jedno ze stanowisk już
starałam się ukazać – chodzi o przekaz uniwer-
salnych wartości, do których sami jesteśmy przy-
wiązani. Ale istnieje też inne stanowisko – przez
wielu uważane za ryzykowne – „należy pozwolić
dzieciom na spontaniczne przeżywanie dzie-
ciństwa, bez płątania ich w sprawy dorosłych,
ufając, że naturalne prawa rozwoju pozwolą
im w przyszłości na dokonanie samodzielnych
ocen”¹⁰. Sprawom tym usiłuje sprostać pedago-
gika literatury.

Pedagogika literatury (teoria i praktyka)

Jest to dziedzina nowa. Ponieważ ukazał się pod-
ręcznik z tego zakresu, postaram się przekazać
kilka najbardziej znamienitych propozycji¹¹. Au-
torka Stephanie Jentgens – germanistka i psy-
cholog, zajmuje się też naukami politycznymi na
Uniwersytecie w Kolonii i na Akademii w Rem-
scheid – postanowiła się zmierzyć z trudną kwe-
stią, a mianowicie odpowiedzieć na pytanie: jak
sprawić, aby dzieci odzyskały radość czytania.
I zasugerowała konieczność powstania nowego

zawodu – pedagoga literatury, zarysowując jego
profil. W Polsce, jak wskazuje Wortal Publicz-
nych Służb Zatrudnienia, zawód taki jeszcze nie
istnieje. Funkcjonują: pedagog szkolny, pedagog
mediów i pedagog specjalny.

W ujęciu autorki pedagog literatury pracować
ma z literaturą i dla literatury. Przytoczę podaną
w podręczniku definicję pedagogiki literatury:
„Jest to wychowanie poprzez literaturę i dla li-
teratury, szczególnie służyć ma umiejętności wy-
rażania się poprzez język”¹². Wychowanie dla/do
literatury to kształcenie kompetencji związanych
z uczeniem się czytania i słuchania, służących
podtrzymywaniu zainteresowania czytaniem, tak
aby budziło radość. Kompetencje w tym zakresie
służą też poznawaniu piękna języka. Wchodzą
w jej zakres więc pewne elementy wiedzy, na
przykład z teorii literatury.

Natomiast wychowanie poprzez literatu-
rę ma otwierać na myślenie, rozumienie świata
i siebie, budzić kreatywność, empatię, pomóc wy-
rażać przekonania¹³. Przeplatają się więc w pro-
cesie pracy z literaturą doznania estetyczne i wy-
magania etyczne.

Literatura ujmowana jest szeroko, obej-
muje nie tylko tradycyjną epikę, lirykę i dramat,
ale i formy medialne: nagrania, słuchowiska,
scenariusze.

Pozaszkolna pedagogika literatury, a taką
właśnie przede wszystkim zajmuje się Stephe-
nie Jentgens, na pierwszy plan wysuwa przy-
jemność i radość z recepcji. Nie ma tu kontro-
li, sprawdzania efektów. Zaczyna się wcześniej
(w perspektywie życia ludzkiego), na przykład
od zabawy paluszkami w czasie opowiadania
małemu dziecku, a kończy głośnym czytaniem
ludziom starym i słabym. W młodości powinna
przechodzić w proces samokształcenia. Nieod-
parcie przypominają się tu usiłowania naszych
pedagogów społecznych, szczególnie Heleny
Radlińskiej, propagujących taką formę samo-
rozwoju już od okresu międzywojennego¹⁴.

W pedagogice wczesnoszkolnej używa się angielskiego pojęcia *literacy* (niem. *Literalität*). Rozumie się przez nie wielość kompetencji, które chce upowszechnić pedagogika literatury – nie tylko kompetencje czytania i pisania, ale też umiejętność mówienia, opowiadania, słuchania, rozumienia. Kształcenie literackie ujmuje pedagogika literatury tylko jako część *literacy*.

Autorka drobiazgowo ukazuje nabywanie umiejętności językowych u dzieci młodszych (0–5 lat) i starszych (6–10 lat). Te najmłodsze powinny, na przykład, śledzić opowiadanie dorosłego, interesować się pisaniem, opowiadać z radością. W swojej relacji skupię się jednak przede wszystkim na pracy z dziećmi starszymi, bo tego okresu rozwoju dotyczą moje doświadczenia zawodowe. Wtedy już wymagana jest interpretacja tekstu, krytyczne czytanie – a więc dalsze myślenie o poznanej treści, a także wspomnianą już świadomość fikcji. Dochodzi też pisanie jako wyrażanie siebie, środek do odnajdywania tożsamości i ważny element dla rozwoju moralnego. Służą temu ćwiczenia doskonalące dyskusję, argumentowanie, zwłaszcza w dziedzinie systemu wartości. Młodzież powinna powoli zaczynać oceniać teksty w sposób pogłębiony¹⁵. Pedagogika literatury działa głównie na czterech polach: „mówienia i słuchania”, „opowiadania”, „czytania”, „pisanie”.

Mówienie/słuchanie

Mówienie i słuchanie to ważne kompetencje bazowe. Od końca lat 90. XX wieku rozwijały się nowe metody mające sprzyjać rozwijaniu umiejętności językowych u dzieci. Co trzy lata organizuje się też międzynarodowe badania piętnastolatków PISA (Programme for International Student Assessment), których celem jest mierzenie wiadomości i umiejętności uczniów, także w dziedzinie czytania ze zrozumieniem. W ostatniej edycji badania wzięło udział ponad 600 tysięcy

uczniów aż z 79 krajów. Eksperti OECD podkreślili, że od ostatniego szczegółowego badania w roku 2009 znacząco zmienił się sposób, w jaki ludzie na całym świecie czytają, w coraz większym stopniu wykorzystując urządzenia elektroniczne. Uczniowie obecnie musieli się wykazać umiejętnościami związanymi z wyszukiwaniem informacji w wielu źródłach, składaniem ich w całość, wyciąganiem wniosków, ocenianiem wiarygodności. Polscy uczniowie w badaniach PISA wypadają coraz lepiej¹⁶. Wspieranie języka stało się kluczem do wyrównywania szans – już od przedszkola.

Autorka podręcznika *Pedagogika literatury* opowiada się za codziennym wspieraniem umiejętności językowych dzieci, za kulturą codzienności. Dużą rolę gra tu słuchanie ze zrozumieniem i późniejsze opowiadanie, kształci ono bowiem budowanie zdań (syntaktyka) i rozumienie znaczeń (semantyka).

Rola opowiadania

Okres przedszkolny odgrywa dużą rolę w rozwoju języka. W wieku około 6 lat w zasadzie kończy się zdobywanie czynnego języka, choć bogaci się on oczywiście dalej¹⁷. Na drodze socjalizacji literackiej nadal dużą rolę odgrywa kontakt z książką z obrazkami, szczególnie gdy towarzyszy temu bliskość opowiadającej osoby, piosenki, wierszyki. Jest to podbudowa pod kulturę książki. Uczestniczymy wtedy w kreowaniu wspólnego świata, tworzymy wspólnotę ze słuchającym i stajemy się wspólnie częścią kulturowego dziedzictwa, a więc podzielanych wyobrażeń i postaw.

Dużą rolę odegrać może kontekst (pomieszczenie, czas), ale przede wszystkim sam opowiadający, jego język, ton, mimika. Wyraża on bowiem też siebie, chce od siebie coś o świecie opowiedzieć. Wiele znanych tekstów, udostępnianych dzieciom, porusza sprawy uniwersalne. Opowia-

danie, słuchanie opowiadania i jego konstruowanie mogą się więc stać ważnym instrumentem tworzenia osobowości. Dzieci na ogół umieją powtórzyć zasłyszane opowiadanie. Chętnie opowiadają już dzieci czteroletnie. Znajdują nowe słowa, uczą się kolejnych zwrotów, odkrywają drogę do języka literackiego.

Czytanie

Czytanie jest jedną z centralnych metod w pedagogice literatury. Analiza danych z badań PISA (rok 2009) wykazała związek czytania głośnego we wczesnym dzieciństwie z kompetencjami w czytaniu w wieku lat 15¹⁸. Czytanie głośne, w otoczeniu bliskich, wzmacnia kompetencje społeczne. Badania psychologiczne również wskazują, że ludzie, którzy w dzieciństwie często czytali dobrą literaturę z różnymi interesującymi dla dziecka charakterami, wyróżniali się potem korzystnie w testach badających wrażliwość emocjonalną¹⁹. Czytanie, jak wynika z badań, wspiera bowiem inteligencję emocjonalną, wspomniane kompetencje społeczne, trenuje też połączenia mózgowe, ma wszechstronne znaczenie dla rozwoju. Bezspeczne jest więc jego znaczenie dla przebiegu kariery szkolnej.

Warto tu wspomnieć o Fundacji ABCXXI – Cała Polska czyta dzieciom. Jej dyrektor programowa, Elżbieta Olszewska, współautorka wraz z Ireną Koźmińską książek *Z dzieckiem w świat wartości* i *Wychowanie przez czytanie*, inicjatorka wielu akcji kulturalnych, zwraca uwagę na błędy, które popełniane są czasem we wczesnym okresie pracy z książką, także w szkole: „Czytelnika wychowuje się od początku jego życia. Jeśli czynność czytania kojarzona będzie zawsze z przyjemnością, dziecko nie przestanie czytać. Jeśli jednak będzie się ona wiązać ze stresem, stanie się odwrotnie...”²⁰.

Chodzi między innymi o to, aby nie zmuszać dzieci słabo czytających do czytania głośno na

forum klasy. Zdaniem zwolenników akcji „Cała Polska czyta dzieciom” – czytanie głośne przez dorosłych nie powinno też ustawać z chwilą nabywania przez dzieci umiejętności czytania samodzielnego. Tworzy bowiem wspomnianą cenną bliskość – co jest niezwykle ważne zwłaszcza obecnie, współczesne dzieci są bowiem bardzo samotne. Czytanie pozostaje w dalszym ciągu kompetencją kluczową. Choć z biegiem czasu staje się bardziej wybiórcze i skrócone. W literaturze fachowej i naukowej kierujemy się przede wszystkim słowami kluczowymi. Mówi się nawet o nowej jakości czytania, znacznie bardziej selektywnego. W pedagogice literatury chodzi jednak głównie o jego duchowy potencjał²¹.

Pisanie kreatywne

W pedagogice literatury wiele miejsca poświęca się pisaniu kreatywnemu. Pojęcie to przejęto z języka angielskiego (*creative writing*). W Niemczech stało się ono popularne w latach 70. XX wieku – miało uwalniać od myślowych schematów. Często praktykowano parodie bajek, tworzone kolaże tekstów (*Text collagen*). Dydaktyka niemiecka dużo zawdzięcza tu Kasparowi Spinnerowi²². Pisanie kreatywne to nie tylko wyrażanie siebie, ale też próba poznawania czegoś nowego, przyswajanie w fantazji nowych doświadczeń, na przykład wmyślanie się w innych ludzi i czasy²³. W toku rozwoju technicznego zaciera się granica między pisaniem publicznym i prywatnym. Wielu młodych prezentuje swoje poglądy, refleksje i dzieli się doświadczeniami na blogach i Facebooku. Z punktu widzenia pedagogiki literatury otwierają się tu nowe możliwości.

Autorzy zajmujący się kreatywnym pisaniem, Stephan Porombka z Uniwersytetu Sztuki w Berlinie i Sandra Zanetti, mówią o czterech elementarnych metodach prowadzących do kreatywnego pisania: „obserwowanie”, „szkicowanie”, „zbieranie” i „notowanie”. A więc najpierw

notujemy pomysły, także idee, myśli, obserwacje – jeszcze bez korekty. Dopiero potem precyzujemy cel, porządkujemy zapiski pod kątem tematu czy hasła. Pomocne może być wyjście od jednego słowa w środku kartki, wokół którego notujemy asocjacje, zamieszczając je w kręgu. Stymulacji pisania kreatywnego służyć mogą różne formy pracy:

- notowanie spostrzeżeń zmysłowych, na przykład przy opisie pokoju czy szerszego środowiska, w którym żyje bohater naszego tekstu;
- notowanie wrażeń słuchowych, zapachowych;
- kontynuowanie tekstu już napisanego (dodam, że już pedagog i pisarz Aleksander Kamiński zalecał wspólne pisanie „powieści klasowej”, w klasie podzielonej na grupy – każda grupa pisała jeden rozdział);
- wybieranie tematów stwarzających pole do notowania obserwacji i różnorodnych wrażeń (dla dzieci młodszych może to być pora roku, na przykład „wiosna”).

Rola pedagoga literatury

Wymagania programowe precyzują różne formy wypowiedzi, które uczniowie powinni poznać w toku nauki w szkole podstawowej i doskonalić w toku dalszej nauki. Do bardziej złożonych należą: podanie, artykuł, referat, list, do łatwiejszych – podpis pod obrazkiem, opis ilustracji, tekst na kartkę pocztową.

Pedagogowie literatury mogą wspierać dzieci i młodzież przy realizowaniu tych zadań, na przykład w świetlicy, towarzyszyć przy uczeniu się czytania i przy odkrywaniu literatury – przez rozmowy i słuchanie. Mogą próbować interweniować, gdy występują kryzysy, lub gdy słabo rozwinięte umiejętności stają się hamulcem. Pedagogika literatury ma bowiem znaczenie emancyipacyjne²⁴. Trudno tu o podanie

szablonów, sukces nie jest mierzony na przykład liczbą wypożyczonych książek. Pedagog literatury może werbalnie dodawać otuchy, podzielać przeżywanie sukcesu, orientować dzieci na ich mocne strony w tym zakresie, a braki traktować jako czynnik do dalszego rozwoju. Ponieważ teksty pisane wiążą się często z utworami literackimi, ważna jest odpowiedzialność w zakresie sugerowanych pozycji. Mniej dotyczy to lektur z obowiązującego kanonu, bardziej wprowadzanych nowości.

Sugestie pedagoga w tym zakresie powinny być podporządkowane estetycznym i pedagogicznym miarom jakości i wartościom²⁵. Podkreślano to dobitnie w naszej myśli humanistycznej od lat. Profesor Stefania Skwarczyńska mówiła o „głębi ideowego przesłania utworu”²⁶. W czasach bardziej współczesnych zastanawiano się nad kryteriami wyboru tekstów dla młodych czytelników, mówiąc o „kontakcie ze światem ludzkich wartości, także z tradycją kultury”, kształceniu zbiorowej pamięci²⁷.

Zwracano jednocześnie uwagę na swoistą gotowość do konfrontowania się z sytuacjami częściowo nowymi, innymi słowy przyglądano się, czy młody czytelnik jest gotowy na arcydzieła. Wymagają one bowiem często trudu, rezygnacji ze swoich czytelniczych przyzwyczajęń. Lekturowa codzienność nastolatków odbiega przecież na ogół od zachowań wzorcowego czytelnika arcydzieł. Dzieci i młodzi ludzie szukają bowiem „radości czytania”. W tym „przejściu” pomóc może obcowanie z poezją, na przykład ks. Jana Twardowskiego, jak również z prozą – także mniej znanych – pisarzy współczesnych²⁸.

Przypisy

¹ Ks. M. Dziewiecki, *Sytuacja współczesnych wychowanków*, „Cywilizacja” 2014, nr 50, s. 37–44.

² J. Szymaniak, *Młodzież. Szkoła. Wartości. Dwa pokolenia wobec lektury*, Koszalin 2005.

- ³ M. Dziewiecki, *Sytuacja współczesnych wychowanków*, op. cit., s. 42.
- ⁴ N. Postman, *Zabawić się na śmierć. Dyskurs publiczny w epoce show-businessu*, przeł. L. Niedzielski, Warszawa 2002. Cyt. za: W. Wojtanowska, *Dorastanie w popkulturze*, „Cywilizacja” 2014, nr 50, s. 73.
- ⁵ Na uwagę zasługują niektóre komiksy. Są takie, które oszalałają precyzją rysunku, bogactwem koloru, intertekstualnym scenariuszem. Tak oceniono opowieść graficzną Sebastiana Skrobola *Quiet little Melody (Mała cicha melodia)*, Warszawa 2014. Jest to jednak raczej, jak sądzę, bajka dla dorosłych, ze względu na nagromadzenie elementów grozy.
- ⁶ W. Wojtanowska, *Dorastanie w popkulturze*, op. cit., s. 78.
- ⁷ J. Papużyńska, *Biblioteki a czytanie*, w: *Po potopie. Dziecko, książka i biblioteka w XX wieku*, Warszawa 2008.
- ⁸ Ibidem, s. 167.
- ⁹ Ibidem, s. 168.
- ¹⁰ Ibidem, s. 169.
- ¹¹ S. Jentgens, *Lehrbuch Literaturpädagogik. Eine Einführung in Theorie und Praxis der Literaturvermittlung*, Weinheim-Basel 2016.
- ¹² Ibidem, s. 16.
- ¹³ Ibidem, s. 17.
- ¹⁴ Należy wspomnieć między innymi o takich pracach Heleny Radlińskiej, jak: *Książka wśród ludzi* (1929), *Zagadnienia bibliotekarstwa i czytelnictwa* (1964), *Z dziejów pracy społecznej i oświatowej* (1966).
- ¹⁵ S. Jentgens, *Lehrbuch Literaturpädagogik. Eine Einführung in Theorie und Praxis der Literaturvermittlung*, op. cit., s. 22.
- ¹⁶ Warto zwrócić uwagę na omówienia: *Godzina prawdy*, „Głos Nauczycielski” 2019, nr 46; L. Galarowicz, *Polscy uczniowie w czolówce*, „Gazeta Polska Codziennie”, z dn. 6 XII 2019, s. 2; P. Skura, *Oto jest test prawdy*, „Głos Nauczycielski” 2019, nr 49, s. 4; P. Skura, *Polska na podium*, „Głos Nauczycielski” 2019, nr 50, s. 3; *Musimy to naprawić*, „Głos Nauczycielski” 2019, nr 50, s. 7.
- ¹⁷ S. Jentgens, *Lehrbuch Literaturpädagogik. Eine Einführung in Theorie und Praxis der Literaturvermittlung*, op. cit., s. 27.
- ¹⁸ Ibidem, s. 34–35.
- ¹⁹ Ibidem, s. 37.
- ²⁰ *Narodowa sprawa*. Z Elżbietą Olszewską rozmawia J. Wojciechowska-Narloch, „Głos Nauczycielski” 2019, nr 7, s. 14.
- ²¹ S. Jentgens, *Lehrbuch Literaturpädagogik. Eine Einführung in Theorie und Praxis der Literaturvermittlung*, op. cit., s. 38.
- ²² K. Spinner, *Kreatives Schreiben*, „Praxis Deutsch” 1993, nr 119, s. 17–23.
- ²³ S. Jentgens, *Lehrbuch Literaturpädagogik. Eine Einführung in Theorie und Praxis der Literaturvermittlung*, op. cit., s. 41.
- ²⁴ Ibidem, s. 49.
- ²⁵ Ibidem, s. 50.
- ²⁶ S. Skwarczyńska, *Wstęp do nauki o literaturze*, t. III, Warszawa 1965, s. 162.
- ²⁷ J. Ługowska, *W poszukiwaniu arcydzieł*, w: D. Świerczyńska-Jelonek, G. Leszczyński, M. Zajac, *Po potopie. Dziecko, książka i biblioteka w XXI wieku. Diagnozy i postulaty*, Warszawa 2008, s. 33–42.
- ²⁸ Ciekawym zjawiskiem jest proza Anny Stryjewskej, od wielu lat zawodowo związanej z Łodzią. W roku 2015 zdobyła wyróżnienie w konkursie „Książka Przyjazna Dziecku”. Jest autorką książki *Chłopiec z ulicy Wschodniej* (Katowice 2019), mówiącej o trudnym dorastaniu chłopca z rodziny dotkniętej przemocą i alkoholizmem.

Jadwiga Szymaniak

Doktor nauk humanistycznych w zakresie pedagogiki, polonistka, długoletnia nauczycielka języka polskiego, emerytowana nauczycielka akademicka Gdańskiej Wyższej Szkoły Humanistycznej. Autorka książek: *Młodzież. Szkoła. Wartości. Dwa pokolenia wobec lektury* (2005), *Wykłady z pedagogiki szkolnej* (2010 i 2011), *Pedagogika szkolna* (2013). Rozprawy i artykuły publikowała między innymi w „Głosie Nauczycielskim”, „Pedagogice Szkoły Wyższej”, „Studiach Bałtyckich”, „Studiach Gdańskich”, „Zeszytach Naukowych Uniwersytetu Szczecińskiego”.

18 równa się 40

Wojciech Rusinek

Felieton z cyklu *Trefne konspekty*

Można mieć wątpliwości, czy komunikacja cyfrowa spełniła pokładane w niej nadzieje, na przykład na to, że przyniesie lepsze narzędzia obywatelskiej kontroli władzy czy upowszechni pragnienie pogłębiania wiedzy, ale jedno na pewno się udało: dzięki internetowi zobaczyliśmy, co naprawdę myślą tak zwani zwykli ludzie. Nie są to niestety wnioski budujące – internetowy *vox populi* (wbrew pozorom tworzą go przedstawiciele wszystkich klas społecznych) okazał się pokraczną mieszaniną frazesów, resentymentów, haseł podrzuconych cynicznie przez instytucje władzy, najpierwotniejszych zabobonów i fobii.

Wiemy na przykład, że – nieprawdopodobne, ale tak właśnie jest – ludzie chcą, żeby wszyscy pracowali więcej. Nie chodzi o to, żeby wykonywali pracę ciekawszą, efektywniejszą, spokojniejszą. Nie, po prostu trzeba pracować dłużej i już. Wystarczy, że jakaś grupa zawodowa wedle powszechnego mniemania pracuje mniej, a w debacie publicznej staje się obiektem zbiorowej niechęci, której wyrazem jest opinia, iż „powinni pracować jak normalni ludzie, czterdzieści godzin i 26 dni urlopu”. Ale może – odbijmy piłeczkę w kierunku anonimowego głosu z sieci – właśnie ta sytuacja nie jest „normalna”?

Oczywiście w takich opiniach kryje się poczucie niesprawiedliwości: „oni za osiemnaście godzin dostają tyle, co ja za czterdzieści”. Wiemy, jak bardzo fałszywa wiedza stoi za powyższym przekonaniem, jak intelektualnie wygodny jest to mit, jakie pokłady antyinteligencji niechęci, pielęgnowanej przez dziesięciolecia po 1945 roku, osadziły się w tych słowach, ale resentyment jest prawdziwy. Nie musimy przy tym – nie o tym jest mój felieton – w naszym środowisku przekonywać się wzajem, że rzeczywiście poświęcamy na pracę co najmniej czterdzieści godzin tygodniowo (a przynajmniej ci z nas, którzy rzetelnie traktują obowiązki). Nie jestem jednak przekonany, czy postępujemy właściwie, uparcie wyjaśniając światu, że naprawdę, ale to naprawdę spełniamy z należytą starannością zapisy polskiego prawa pracy. W ten sposób bezrefleksyjnie utrwalamy pogląd, który być może należałoby poddać wielkiej rewizji.

Proponuję zatem eksperyment myślowy: może nie powinniśmy dążyć do dostosowania czasu pracy wszystkich grup zawodowych do uniwersalnego modelu 40h/tydzień + 26 dni urlopu, lecz przeciwnie – to inne grupy zawodowe powinny zmierzać ku modelowi nauczycielskiemu (niższy wymiar etatu, część zadań wykonywana poza właściwym miejscem pracy i zdecydowanie dłuższy urlop), a być może wszyscy będziemy pracować efektywniej i z większą przyjemnością. Postuluje to dziś wielu socjologów i psychologów pracy, na przykład David Graeber, takie rozwiązania wprowadzają eksperymentalnie niektóre państwa. To już naprawdę się dzieje! Nie żyję w nauczycielskiej bańce i wiem, że mocni korporacyjni gracze wprowadzają podział pracy na tę realizowaną stacjonarnie, i tę, którą można, w ciągu jednego czy dwóch „wolnych” dni w tygodniu, wykonać kiedykolwiek, gdziekolwiek, dowolnie wyznaczając sobie odpoczynek (co wymaga jednak także innej niż rozpowszechniona w Polsce kultury zarządzania czasem pracowników). Nie znam przy tym nikogo, kto by na taki układ narzekał.

Rozmawialiśmy o *Pieśni nad Pieśniami* i dość bezradnie próbowałem wytłumaczyć pierwszoklasistom sens użytych w niej metafor i porównań („no dlaczego miłość to żar ognia?”). Śmiali się i patrzyli na mnie z coraz większym pobłażaniem. Przewidywałem porażkę, więc w desperackim odruchu zapytałem: „nigdy nie byliście zakochani?”. Kolejny wybuch śmiechu i okrzyk: „nie mamy na to czasu, jesteśmy w biol-chemie”.

* * *

Dwa lata temu, gdy w szkołach podstawowych znów pojawili się siódmoklasiści, dziennikarze alarmowali: w 1992 roku rozporządzenie określało obowiązkowy wymiar lekcji na 23 godziny, w czasach istnienia gimnazjów było to 29 godzin, zaś obecnie trzynastolatki spędzają w ławkach... 32 jednostki lekcyjne! Moim znajomym w latach 90. wystarczyły dwie godziny biologii w zakresie podstawowym (przez trzy lata) i dwie – w rozszerzonym (ostatnie dwie klasy), by znaleźć się na liście przyjętych na medycynę. Dziś niemal wszyscy uczniowie klas biologiczno-chemicznych do sześciu, ośmiu programowych biologii dokładają trzy, cztery godziny korepetycji lub kursów przedmaturalnych (i poświęcają dodatkowy rok po maturze na „właściwe” przygotowanie do studiów). Rzeczywiście, z punktu widzenia trudno osiągalnego celu (studia, a potem „lukratywna” praca) i wymagań edukacyjnych zakochanie musi jawić się jako prawdziwe marnotrawstwo czasu.

Jonathan Crary trafnie zauważa w książce 24/7, że czas wolny jest dobrem, o które toczy się dziś nieustanna ekonomiczna batalia. Powolność, kontemplacja, a zwłaszcza sen nie pasują do świata, w którym każda chwila powinna być wypełniona aktywną samorealizacją nakierowaną na zysk (pieniądz lub prestiż). Crary zauważa z przekąsem, że większość „naszych” pragnień i potrzeb jest dziś wykreowana przez rynek (przede wszystkim usług i rozrywek cyfrowych) i została nam najzwyczajniej wmówiona. Mam

wrażenie, że podobny proces zachodzi w edukacji – nieustannie bombardujemy uczniów poradami dotyczącymi „efektywnego wykorzystania wolnego czasu” i zachęcamy ich do „twórczego zaangażowania”, ale kryje się pod tymi hasłami głównie promowanie wyścigu po komercyjny sukces. Z zaklętego kręgu kurczącego się czasu coraz trudniej się jednak uwolnić, bo system (czyli: rodzice i my) na każdym kroku wmawia, że jeszcze więcej szaleńczej pracy i rezygnacja z tego, co nie da się przeliczyć na wynik maturalny, jest tym, czego młodzi ludzie pragną najbardziej na świecie.

Stres związany z rygorystycznym myśleniem o czasie – ten sam, którego integralną częścią (a nie skutkiem ubocznym, jak często myślimy) są frustracje, nerwice i depresje – zaczyna się jednak już na bardziej elementarnym poziomie, na każdej lekcji. Chyba powinniśmy podważyć jeszcze jeden dogmat związany z „czasem pracy” uczniów – pracę na czas. Uznanie, że wszyscy uczniowie powinni dostosować się do uniwersalnych i ścisłych ram czasowych sprawdzianów i egzaminów jest, z punktu widzenia tego, co wiemy o ludzkiej psychice, zadziwiające. W obecnie funkcjonującym systemie mamy oczywiście procedury tak zwanych dostosowań, otrzymanie zgody na wydłużenie czasu pracy możliwe jest jedynie na podstawie orzeczeń wydawanych przez poradnie psychologiczno-pedagogiczne. Owszem, z jednej strony muszą istnieć formalne wyznaczniki tego typu ułatwień, ale z drugiej niepotrzebnie spychają one uczniów (w całym procesie badań, orzeczeń, formalnych zgłoszeń) w sferę „przypadków trudnych”, stygmatyzując cechy, które być może do „trudnych” wcale nie należą, są po prostu cechami danej osobowości.

Warto jednak mnożyć w sobie wątpliwości: czy to naprawdę istotne, że ktoś udziela odpowiedzi w czasie pięciu minut, inny w czasie piętnastu, skoro obie mogą być merytorycznie dobre? Czy naprawdę wszyscy muszą pisać rozprawki w tym

samym tempie? Czy na ocenę ważną w rekrutacji na studia powinna się składać ocena z samego tylko egzaminu? Zdaję sobie sprawę, że udzielenie negatywnych odpowiedzi na powyższe pytania tylko pozornie zbliża nas do nowoczesnej, zindywidualizowanej edukacji typu tutorskiego, a w istocie rodzi szereg kolejnych wątpliwości. Ta najważniejsza dotyczy oczywiście możliwości stosowania zróżnicowanych wymagań czasowych w zespole składającym się z trzydziestu sześciu osób. Komu pozwolić na dłuższe pisanie, a komu nie? Jak rozpoznać właściwe potrzeby uczniów w tym zakresie, gdy mamy pod opieką dwie setki wychowanków?

Uznajemy dziś za oczywistość, że szkoła „przygotowuje młodego człowieka do podjęcia zadań na rynku pracy”, a przecież nie wszyscy z naszych absolwentów będą musieli w życiu zawodowym podejmować decyzje tak szybko jak chirurg. Milcząco jednak zakładamy, że umiejętność pracy na czas muszą opanować wszyscy. Gdyby życie wymagało od nas tylko szaleńczego tempa, na pewno nie mógłbym zostać felietonistą „Refleksji”: te kilka zdań, które kresliłem powyżej w obronie uczniów powolnych, refleksyjnych i gapowatych, pisałem ponad dwa tygodnie.

Wojciech Rusinek

Doktor nauk humanistycznych, literaturoznawca, krytyk literatury. Opublikował między innymi książkę *Z tekstów i przeciw tekstom. Szkice o najnowszej prozie polskiej* (2016). Nauczyciel języka polskiego w II Liceum Ogólnokształcącym z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marii Konopnickiej w Katowicach. Redaktor dwutygodnika kulturalnego „artPAPIER”.

Rozważania o liczeniu

Sławomir Osiński

Czyli jak uniknąć mnożenia przez zero

„Na nic już nie liczę!” – to defetystyczne i nieoptymistyczne stwierdzenie coraz częściej gości na ustach nauczycieli i dyrektorów ze stażem zbyt dużym, żeby zmienić zawód, a zbyt małym, aby uciec na emeryturę i skazać się na jeszcze żałośniejszą egzystencję. Liczenie, przeliczanie, zliczanie, podliczanie, a nawet rozliczanie – to pojęcia towarzyszące na co dzień kadrze zarządzającej szkołami. Spróbujmy dokonać choćby pobieżnej inwentaryzacji czynności pochodnych od liczenia. Przede wszystkim dyrektor placówki oświatowej, osobiście przedszkola, musi liczyć na siebie w kwestiach prawno-organizacyjnych i sprawnie operować wiedzą

i rozumieniem nie tylko czterech oświatowych ustaw i kilkudziesięciu bez przerwy zmienianych rozporządzeń, ale około dziewięćdziesięciu innych z przynależnymi im kilkuset rozporządzeniami. Przygotowując arkusz i planując dalszą pracę szkoły, musi optymistycznie liczyć, że w ciągu najbliższych lat najlepsi nauczyciele nie odejdą do zajęć lepiej płatnych lub nawet podobnie wynagradzanych, ale nieobarczonych kolosalną odpowiedzialnością za życie i bezpieczeństwo, niestresujących straszniem postępowaniem dyscyplinarnym, a przede wszystkim wolnych od pracy w domu i stert sprawozdań oraz innych dokumentów.

W planowaniu ważne jest także przeliczanie godzin: z siatki zwykłych, dyrektorskich, danych przez organ oraz wynikających z podziału na grupy, a także liczenie tych przeznaczonych na pomoc psychologiczno-pedagogiczną, dbanie, żeby mieściły się w dozwolonym pensum, poprawnie uśredniały i odpowiednio układały się w planie. Dodatkowo pojawia się zadanie wymagające szczególnej zręczności: przy kilkunastu lub kilkudziesięciu klasach trzeba tak zorganizować zajęcia, żeby wszędzie religia była na pierwszej lub ostatniej godzinie.

Trzeba też corocznie obliczać ryzyko wszelkiej maści oraz monitorować je kwartalnie w ramach kontroli zarządczej oraz dokonywać wyliczeń i naliczeń związanych z budżetem (co na szczęście w dużej mierze spada na księgowę), gdzie króluje odwieczna nierówność między potrzebami a przyznanymi środkami budżetowymi.

Umiejętności wymagają też sprawy związane z zatrudnieniem, awansem i godzinami ponadwymiarowymi. Te ostatnie każda gmina każe liczyć po swojemu, najczęściej bez sprecyzowania, w jaki sposób. Policzyć wypada tutaj wysługe lat, żeby nagrodę jubileuszową przyznać, a także należy pilnować, żeby nauczyciel nie przekroczył półtora etatu, uśredniać i rozwiązywać równania z kilkoma niewiadomymi z cyklu, jak płacić za wycieczki lub szkolenia w dniach wolnych.

Intensywnego zliczania i podliczania wymagają zamówienia publiczne, gdzie trzeba wszystko tak zrobić, żeby się rozliczyć dało, oszczędnie było i zgodnie z prawem. Dydaktyką też czasem dyrektor się zajmuje, choć mam wrażenie, że dzisiaj najważniejsze jest oszczędne funkcjonowanie instytucji, która dzięki rozlicznym procedurom ma być względnie bezpieczna dla dzieci i spełniająca życzenia rodziców. Coraz trudniej do głównych powinności szkoły zaliczyć jej misję nauczania-uczenia się, do której ponoć została powołana. Ale i w tej materii obliczane są wyniki oceniania, testów, ewaluacji i innych pomiarów dydak-

tycznych oraz rankingów wszelakich. Gdy są w mniemaniu organów niepomysłne, uruchamia się mechanizm rozliczania, a w ekstremalnych przypadkach trzeba zaliczyć program naprawczy.

Ozdobą wszelakiego podliczania są przeróżne ankiety monitorujące – rywalizujące ze sobą pod względem logiki, sensu i przydatności jakiegokolwiek do czegośkolwiek oraz podobne o proveniencji badawczej lub związkowej.

Grozą i sankcjami wieje od podliczeń statystycznych GUS, ZUS i SIO permanentnie wdrażanych w zdrowy trzon zarządzania państwem, dla którego (oraz innych organów – tudzież podmiotów) mają być źródłem wiedzy i katedrą oświatowej mądrości, na co liczyć w perspektywie najbliższego stulecia raczej nie można.

Na koniec pozostaje comiesięczne liczenie wydatków domowych w zestawieniu z otrzymanym wynagrodzeniem, u dyrektorów ubogaconym dodatkami funkcyjnymi, a u nauczycieli godzinami ponadwymiarowymi, co wywołuje radosną refleksję, że rzeczywiście na nic już liczyć nie można. Jeśli nie zmieniają się dotychczasowe warunki pracy pedagogów, to za parę lat pozostaną w szkołach wypaleni przedemeryci i notoryczni idioci. Gdzieś tam trafi się entuzjasta mający dochody z innych źródeł, lub świetnie zarabiającego partnera, co pozwoli mu na hobby, jakim jest praca w szkole. Wiem, co mówię, bo tak już było i między innymi dzięki temu oświata jakoś przetrwała.

Sławomir Osiniński

Absolwent polonistyki, zarządzania w oświacie oraz marketingu i zarządzania w ochronie zdrowia.

Nauczyciel, publicysta kulinarny i społeczny, rysownik satyryczny, czasem literat i tekściarz. Egzaminator maturalny, ekspert ds. awansu nauczycieli, wykładowca na studiach podyplomowych. Dyrektor Szkoły Podstawowej nr 47 im. Kornela Makuszyńskiego w Szczecinie.

Elementy kultury matematycznej

Krystyna Milewska

Konkurs wiedzy o świecie antycznym

Pierwsze dekady XXI wieku to w wielu placówkach muzealnych czas niezwykle ożywionej działalności popularyzatorskiej. Muzea chcą uczestniczyć w procesie kształtowania świadomości historycznej społeczeństwa poprzez tworzenie szerokiej płaszczyzny wymiany myśli naukowej, zgodnie z posiadanym profilem. Wykorzystują w tym celu różnorodne formy pracy oświatowej, takie jak: konferencje naukowe, spotkania popularnonaukowe, lekcje i warsztaty muzealne, otwarte cykle wykładów, kursy, spotkania teatralne, pokazy filmowe i multimedialne, koncerty muzyczne i festyny rodzinne, które często – towarzysząc wysta-

wom – stają się stałym punktem przy planowaniu harmonogramu projektów. Muzea są świadome tego, że należy iść z „duchem czasu”, by „wychować sobie” pokolenie wrażliwych na sztukę i kulturę obywateli. Nie dziwi zatem fakt, że zmiany, jakie zachodzą w muzeum – zarówno w sposobie eksponowania, jak i upowszechniania jego zbiorów – są dostrzegane przez odbiorców sztuki. Projektowane z rozmachem, efektowne aranżacje i pełne nowinek technicznych ekspozycje robią coraz większe wrażenie na publiczności. Następuje przede wszystkim wyraźne przesunięcie akcentu z eksponatu na osobę widza – gościa, jego potrzeb i oczekiwań.

Sztuka (nie) broni się sama

Sztuka jest światem kuszącym i tajemniczym – podobnie jak każda inna dziedzina twórczej działalności człowieka. Dzieła autorstwa malarza, rysownika, rzeźbiarza, architekta stanowią samodzielne byty, powstałe na gruncie własnych przeżyć, emocji, marzeń, wyobrażeń. Obszar wytwarzania dzieła, poza pewnymi wyjątkami, zamyka przestrzeń w dwóch biegunach: artysty i dzieła. Wytwory umysłów i rąk ludzkich pozostawione same sobie stanowią wartość nazywaną przez Gillian Rose obszarem samego dzieła¹. Rozważania dotyczące ram odbiorczości wymagają uwzględnienia interakcji z drugim człowiekiem – odbiorcą. Pozostawienie dzieła bez opisu, komentarza daje odbiorcy wolność, z drugiej strony zwiększa ryzyko obojętności lub niewykorzystania w pełni dzieła sztuki. Percepcja dzieł sztuki nie jest bowiem łatwa. Vera L. Kolberg zauważała w swoich badaniach, że im bardziej elitarne zbiory prezentujemy, tym mniejsze jest ich przyswajanie. Sztuka niestety nie broni się sama, nie ma zwiedzających tylko ze swej natury predestynowanych do przeżywania olśnienia².

Muzeum buduje przestrzeń, w której widz prowadzi dialog zarówno z dziełem sztuki, jak i z drugim człowiekiem. Potrzeba zadawania pytań, redefiniowania własnych spostrzeżeń i opinii sprawia, że stajemy się otwarci na wiedzę i odkrywanie własnych pasji. Istotą edukacji muzealnej jest zatem kształtowanie gustów publiczności i przygotowanie jej na nowe, nie tylko wizualne doznania.

Piękno matematyki

Uważam, że wspólna przestrzeń matematyki i sztuki stanowi niewykorzystane pole poznawcze. Zajęcia łączące matematykę z obszarami sztuki, kultury do tej pory w polskich szkołach należą do rzadkości. „Matematyka, na ogół, postrzegana jest

jako niezwykle użyteczna dziedzina wiedzy. Powszechnie zgadzamy się ze słowami Immanuela Kanta, że »żaden kraj z ambicjami nie może być krajem analfabetów matematycznych«. (...) Przecież spośród wielu dziedzin działalności człowieka matematyka wydaje się najbardziej, poza sztuką, predysponowana do rozwijania myślenia odkrywczego, do wspierania rozwoju jednostki i społeczeństwa. Uniwersalne znaczenie matematyki związane jest z abstrakcyjnym rozumowaniem oraz wnioskowaniem, dostrzeganiem, formułowaniem i rozwiązywaniem problemów. Matematyka daje nam uniwersalne narzędzia poznania”³. „Jean Piaget widzi w niej przede wszystkim »wybitne walory kształcące (...) i rozwijanie umiejętności logicznego myślenia«”⁴. „Stereotypowo matematyka uchodzi za naukę nudną, hermetyczną, gdzie nie ma miejsc na emocje i doznania estetyczne. Taki obraz w większości wynosimy ze szkoły. Trenuje się rozwiązywanie zadań niezbędnych do zdania egzaminów. Tu nie ma miejsca i czasu na refleksję o pięknie. Dlatego większość ludzi uważa, że matematyka to rozwiązywanie zadań, a jedynymi twierdzeniami są twierdzenia Pitagorasa i Talesa. No... może jeszcze twierdzenie sinusów. Stwierdzenia typu »piękne twierdzenie« albo »ładny dowód« są dla większości określeniami bardziej abstrakcyjnymi niż wiele pojęć matematycznych. Ludziom nie mieści się w głowie, że można zachwycić się jakimś rozumowaniem, czy pojęciem albo wzorem”⁵. Wyjątkowość matematyki wśród innych przedmiotów nauczania polega między innymi na tym, że jej obiektów nie można odczuć zmysłami. Są niewidzialne, nie posiadają koloru, masy, zapachu, temperatury. Mają charakter abstrakcyjny, formalny.

Mimo kolejnych reform polskiego systemu edukacyjnego w dalszym ciągu można zaobserwować słabe rezultaty w zakresie posługiwania się przez uczniów wiedzą, umiejętnościami⁶. Zaniedbana jest kultura matematyczna obejmująca, obok sprawności rachunkowej, zrozumienie ciąg-

głęgo przejścia w poszczególnych dyscyplinach matematyki między matematyką-nauką a matematyką szkolną, posługiwanie się językiem matematyki, umiejętność wybierania odpowiednich metod przy rozwiązywaniu zadań, dowodzenie, wprowadzanie pojęć, wyobrażnię, twórczość i zdolność postrzegania piękna⁷. Piękno matematyki – fenomen nie dla każdego uchwytne, dla niektórych niedostrzegalny. Niekoniecznie związany z codzienną użytecznością, raczej z harmonią, doskonałością. Piękno, którego można doświadczyć na różnych poziomach. Problem w tym, że do postrzegania piękna matematyki na poziomie wyższym niż wzrokowy potrzeba pewnego przygotowania merytorycznego. Trzeba znać teorie, klasyczne sposoby rozumowania, przykłady ich stosowania. Niezbędna jest również zdolność refleksji nad istotą pojęć i rozumień matematycznych⁸. Na trudność precyzyjnego określenia relacji pomiędzy walorem estetycznym a poznawczym obiektu widzialnego zwrócił uwagę Arnold Berleant⁹. Michał Szurek kulturę matematyczną umiejscawia w ogrodzie dziewięciu muz – córek Zeusa i bogini pamięci Mnemozyny. Zatem matematykę i wszystkie nauki ścisłe jako objęte niezwykłą kuratelą, mamy prawo traktować jako pełnoprawne składniki kultury człowieka¹⁰.

Królowa nauk w muzeum

Zainspirowana publikacjami oraz działaniami dydaktycznymi Małgorzaty Makiewicz dotyczącymi wspierania edukacji matematycznej poprzez sztukę (fotografie zaopatrzone w tytuły i opisy, anaglify, konstrukcje przestrzenne) włączyłam elementy edukacji matematycznej do autorskiego projektu edukacyjnego „Akademia Antyczna”, realizowanego w Muzeum Narodowym w Szczecinie. Celem autorów tego interaktywnego projektu jest upowszechnianie wiedzy o kulturze antycznej oraz popularyzacja zbiorów Muzeum Narodowego w Szczecinie, w szczególności kolekcji antycznej

Heinricha Dohrna. Kolekcja sztuki antycznej jest stałą wystawą Muzeum Narodowego w Szczecinie i wyróżnia się wyjątkowymi walorami estetycznymi i dydaktycznymi. „Szczecińskie brązy”, jak współcześnie są nazywane kopie rzeźb antycznych wykonanych w Berlinie i Monachium pod okiem archeologa i historyka sztuki Adolfa Furtwänglera i jego uczniów (między innymi Paula Woltera i Johanna Sievekinga), ukazują rozwój rzeźby greckiej od początku okresu klasycznego do czasów augustiańskich¹¹. Stały się one naturalnym otoczeniem dla prowadzonych z powodzeniem od kilku lat lekcji i warsztatów muzealnych, zajęć dla studentów uczelni szczecińskich, spotkań z nauczycielami matematyki i sztuki wszystkich etapów nauczania, warsztatów z metodyki nauczania matematyki.

Kultura antyku pozostaje bezcennym bogactwem. Z niej czerpiemy wiele inspiracji, w niej znajdujemy ogromną wiedzę o człowieku i jego świecie, odkrywamy mądrość życiową. W kulturze antyku odczytujemy źródła rozmaitych koncepcji życia, korzenie licznych dyscyplin nauki, wzory i płodne natchnienia różnych obszarów nauki¹². „Akademia Antyczna” to także konkursy interdyscyplinarne, adresowane do młodzieży. Ich intencją jest rozwijanie zainteresowań szeroko rozumianą kulturą antyczną, elementami kultury matematycznej, literaturą i sztuką, kształcenie umiejętności poznawczego interpretowania i odnajdywania szerszego kontekstu dzieł sztuki, podniesienie poziomu ogólnej wiedzy humanistycznej uczniów, integracja wiedzy i umiejętności z różnych przedmiotów szkolnych, wykształcenie umiejętności oceny kulturowego dorobku cywilizacji europejskiej.

Przebieg konkursu

Konkurs wiedzy o kulturze świata antycznego jest dwuetapowy. Etap pierwszy polega na przeprowadzeniu eliminacji szkolnych – rozwiązaniu testu,

który dostarczają organizatorzy konkursu, i samodzielnym wykonaniu przez uczestników konkursu prac plastycznych oraz autorskiej informacji o nich. Tematyka prac związana jest z kulturą starożytnej Grecji i Rzymu i elementami kultury matematycznej. Każdy uczestnik zobowiązany jest do wykonania dwóch prac plastycznych spośród czterech wskazanych tematów:

- 1) projekt pojedynczego motywu dekoracyjnego – ornamentu;
- 2) projekt wzoru dekoracyjnego, na przykład na posadzkę, tkaninę, ścianę, elewację budynku;
- 3) projekt formy użytkowej wraz ze wzorem dekoracyjnym na jej powierzchni;
- 4) projekt budowli – całej bryły lub wybranego fragmentu, na przykład frontu biblioteki, ganka czy domu mieszkalnego.

W realizacji podanych tematów należy uwzględnić wybraną prawidłowość matematyczną, na przykład symetrię, złoty podział odcinka, translację. Do każdej pracy należy przygotować opis i wyjaśnienie zastosowanych pojęć lub twierdzeń matematycznych.

Format prac plastycznych: 30 cm x 30 cm.

Papier: bristol.

Technika prac: uczestnik może połączyć w jednej pracy kilka technik plastycznych (na przykład wybrane techniki opisane w punktach: a + b, a + c, b + c):

- a) techniki rysunkowe: rysunek kredkami ołówkowymi, cienkopisami, tuszem (czarnym, kolorowym) za pomocą pędzla lub patajki,
- b) techniki malarskie: malowanie farbami plakatowymi, akwarelowymi, temperowymi,
- c) techniki dekoracyjne: mozaika – naklejanka z kawałków kolorowego papieru, wydzieranka z gazety, wycinanka z papieru, aplikacje z tkanin, włóczek, sznurków. Uczeń może zastosować kolorowy papier z bloku technicznego, szary papier pakowy, tektury lub

papiery o różnej fakturze i grubości. Może wykorzystać również papier samodzielnie zabarwiony naturalnymi pigmentami, na przykład sokiem z owoców, herbatą, kawą, wywarem z cebuli.

Każdy uczestnik może zgłosić do konkursu tylko jeden zestaw złożony z dwóch prac. Każda praca i teksty są podwójnie kodowane.

Geometria, symetria, perspektywa

Kultura matematyczna jest jedną z dróg ku twórczości, uwrażliwienia na obraz. To niesłychanie ważny i zarazem trudny etap pracy, w którym najpełniej kształtuje się dualizm pojęć i ich nazw. W dydaktyce matematyki zarówno formalna poprawność, jak również komunikatywność odgrywają szczególną rolę. Matematyczny język ucznia nie kształtuje się wyłącznie podczas najlepszej lekcji matematyki czy lektury dobrej książki. Jest to proces długotrwały, obejmujący cały cykl kształcenia. Język matematyczny jest ścisły i konkretny. Sztuka służy tutaj do osobistej ekspresji, wyrażania siebie. To twórcze doświadczenie wiąże się z podejmowaniem decyzji. Proponowane przez Gillian Rose oddzielenie trzech obszarów: samego obrazu, jego wytwarzania oraz odbiorczości pozwoliło na zbliżenie się do uchwycenia kontekstu pomysłu, planowania i wykonania pracy. Technika kolażu nadaje powstającym pracom wymiar strukturalno-dotykowy. Łączenie sztuk pięknych (rysunku, malarstwa itp.) z innymi dziedzinami przynosi efekt w postaci bogactwa środków wyrazu. Twórczość to w potocznym rozumieniu działanie, którego wynikiem jest powstanie czegoś nowego. W procesie twórczym istotną rolę odgrywają właściwości osobowe, motywacja i doświadczenie jednostki lub grupy, która tworzy. Proces tworzenia jest w dzisiejszych czasach zwykle utożsamiany z twórczym rozwiązaniem problemów (nawet jeśli jego końcowym efektem jest obraz, projekt tkaniny czy

wiersz). Jak głosi stare chińskie przysłowie: „Powiedz mi – a zapomnę, pokaż mi a zapamiętam, pozwól mi wziąć udział – a zrozumieć”¹³.

Czynności takie jak rysowanie i malowanie wiążą się z geometrią. Odpowiednie rozplanowanie postaci i obiektów na płótnie też często odbywa się według zasady złotej proporcji. Do tego dochodzą symetrie, czasem niemal idealne, a czasem przybliżone¹⁴. „Symetria jest idea, z pomocą której człowiek stara się od niepamiętnych czasów ogarnąć myśl i tworzyć porządek, piękno i doskonałość” (Hermann Weyl)¹⁵. Jest jeszcze jedno zagadnienie ściśle wiążące malarstwo z matematyką – perspektywa. Obraz namalowany zgodnie z zasadami perspektywy jest dla nas naturalny, oczywisty, zrozumiały, czyli właśnie taki, jakiego oczekujemy¹⁶.

Intelekt i emocje

Połączenia dwóch, z pozoru bardzo odległych dyscyplin: matematyki i sztuki odpowiada założeniom koncepcji „supernauczania” Janusza Gniteckiego¹⁷, zakładającego równomierne pobudzanie obu półkul mózgowych. Lewa półkula odpowiada, między innymi, za proces analizowania, abstrahowania, rozumowanie dedukcyjne nazywana jest często logiczną lub matematyczną, prawa zaś – kontrolująca proces twórczy, wrażliwość na piękno, określana jest jako artystyczna. Harmonijny rozwój ucznia odnosi się tutaj do połączenia ścisłej, analitycznej wiedzy matematycznej (nauka formalna) z elementami sztuki antycznej, które mają przede wszystkim wywołać przeżycie natury emocjonalnej i intelektualnej.

Warto zauważyć, że w ogóle po raz pierwszy terminu „matematyka” użyli pitagorejczycy. Po grecku *μαθηματική* oznacza wiedzę, czyli matematyk to ten, który ma wiedzę, a nie tylko umie rachować. To właśnie od Pitagorasa wywodzi się, tak charakterystyczne dla starożytnej kultury greckiej, rozumienie liczby jako proporcji pomiędzy

obiektami geometrycznymi. Jemu także przypisywane jest pitagorejskie zdanie: „liczba jest istotą wszystkich rzeczy”. Starożytni Grecy za pitagorejczykami zaliczali do matematyki: arytmetykę, geometrię, astronomię i muzykę¹⁸. Mieszkańcy Grecji wielką wagę przywiązywali do idealnych kształtów, do proporcji. Byli twórcami do dziś obowiązującego w Europie kanonu piękna. Sztuka grecka wykreowała reguły, na których opierali się Europejczycy przez następne dwa tysiące lat. Grecki ideał harmonii, proporcji, spokoju, związany z etyczną kategorią dobra, stanowił odtąd punkt wyjścia wszelkich dyskusji o sztuce. Największe znaczenie w tym zakresie miała grecka architektura oraz rzeźba¹⁹. Grecy architekci i rzeźbiarze stosowali zasadę złotej proporcji, według której opracowali mapy i konstruowali fasady świątyń. Odwoływali się do złotego trójkąta, za pomocą którego ustalali stosunek dłuższego boku świątyni do krótszego. Partenon – budowla, która z całą pewnością należy do najbardziej „matematycznych” na świecie, zachwyca każdego, kto ma szczęście stanąć na skalnym wzgórzu Akropolis w Atenach. O mistrzostwie jej autorów – Peryklesa, Iktinosa i Kallikratesa – świadczą matematyczne obliczenia i sztuczki, których użyli w swojej pracy, aby obserwujący odczuwali piękno i harmonię złotego podziału. Podobno Iktinos spisał wszystkie proporcje występujące w Partenonie. Mimo że księga niestety została utracona, to precyzja architektury i jej matematyczna myśl przemawiają do nas poprzez kamieniarskie dzieło²⁰.

Współczesna szkoła ma przede wszystkim kształtować u ucznia umiejętności ponadprzedmiotowe, takie jak planowanie, organizowanie i ocenianie własnego uczenia się, twórcze rozwiązywanie problemów, skuteczne komunikowanie się, współpracę w grupie, korzystanie z różnych źródeł informacji. Kulturalny, w sensie matematycznym, nauczyciel odważnie proponuje swoim uczniom wędrówkę pomiędzy matematyką a fizyką, przyrodą, informatyką, a także muzyką,

literaturą i sztuką, organizując między innymi wycieczki do ciekawych miejsc, jak interaktywne wystawy (Miasto Nauki czy warszawskie Centrum Nauki Kopernik i naturalnie do Muzeum Narodowego w Szczecinie).

Przypisy

- ¹ G. Rose, *Interpretacja materiałów wizualnych. Krytyczna metodologia badań nad wizualnością*, Warszawa 2010, s. 51–53.
- ² M. Szeląg, *Przyszła rola edukacji*, s. 2, za Vera L. Kolberg, *An Elite Experience for Everyone*, w: D.J. Herman, I. Rogoff (red.), *Museum Culture. Histories, Discourses, Spectacles*, Minneapolis 1994, s. 49–65.
- ³ M. Makiewicz, *Opinia w przedmiocie diagnozy problemów związanych z procesem nauczania matematyki w szkole (począwszy od IV klasy szkoły podstawowej) wraz z odpowiednimi rekomendacjami*, Raport dla Najwyższej Izby Kontroli, www.nik.gov.pl, data dostępu: 19.02.2019.
- ⁴ J. Piaget, *Dokąd zmierza edukacja?*, przeł. M. Domańska, Warszawa 1977.
- ⁵ K. Ciesielski, Z. Pogoda, *Królowa bez Nobla. Rozmowy o matematyce*, Warszawa 2013, s. 163.
- ⁶ M. Makiewicz, *Opinia w przedmiocie diagnozy problemów związanych z procesem nauczania matematyki w szkole (począwszy od IV klasy szkoły podstawowej) wraz z odpowiednimi rekomendacjami*, op. cit.
- ⁷ M. Makiewicz, *Elementy kultury matematycznej w fotografii*, Szczecin 2011, s. 34.
- ⁸ M. Makiewicz, *O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów*, Szczecin 2013, s. 34; zob. też: M. Makiewicz, *Widziane i niewidziane piękno matematyki*, w: „e-mentor” 2016, nr 4 (66), s. 4.
- ⁹ A. Berleant, *Wrażliwość i zmysły. Estetyczna przemiana świata człowieka*, Kraków 2011, s. 18.
- ¹⁰ M. Szurek, *Przedmowa*, w: M. Makiewicz, *Matematyka w obiektywie. Kultura matematyczna dla nauczycieli*, Szczecin 2010, s. 7.
- ¹¹ B. Kosińska, *Szczecińskie muzeum wczoraj*, w: *100 lat Muzeum w Szczecinie*, S.P. Kubiak, D. Kacprzak (red.), Szczecin 2013, s. 87–107.
- ¹² T. Lewowicki (red.), *Kultura antyczna i współczesna edukacja*, Radom 2004, s. 5.
- ¹³ B. Borowska, V. Panfil, *Metody aktywizujące w edukacji biologicznej, chemicznej i ekologicznej*, Bydgoszcz 2001, s. 5.
- ¹⁴ K. Ciesielski, Z. Pogoda, *Królowa bez Nobla. Rozmowy o matematyce*, Warszawa 2018, s. 137.
- ¹⁵ Cyt. za: M. Makiewicz, *Elementy kultury matematycznej w fotografii*, Szczecin 2011, s. 69.
- ¹⁶ K. Ciesielski, Z. Pogoda, *Królowa bez Nobla. Rozmowy o matematyce*, Warszawa 2018, s. 142.
- ¹⁷ J. Gnitecki, *Supernauczanie. Perspektywy nowej edukacji*, Poznań 1988.
- ¹⁸ K. Ciesielski, Z. Pogoda, *Królowa bez Nobla. Rozmowy o matematyce*, Warszawa 2018, s. 132.
- ¹⁹ K. Szelągowska, *Wykłady z historii powszechnej dla szkół średnich*, Warszawa 1996, s. 9–10.
- ²⁰ M. Makiewicz, *Elementy kultury matematycznej w fotografii*, Szczecin 2011, s. 34.

Krystyna Milewska

Historyk, starszy kustosz, kierownik Działu Edukacji Muzeum Narodowego w Szczecinie. Sekretarz naukowy Olimpiady Artystycznej – sekcja historii sztuki, okręg zachodniopomorski. W swojej pracy łączy kompetencje i zamiłowania do historii i turystyki. Autorka wielu konspektów lekcji i warsztatów oraz konkursów muzealnych, a także artykułów z zakresu edukacji muzealnej. Realizuje autorskie programy edukacyjne: „Akademia Brzdąca”, „Akademia Antyczna”, „Akademia Podróżnika” i inne. Należy do Stowarzyszenia Muzealników Polskich oraz Stowarzyszenia Historyków Sztuki.

Być rodzicem?

Anna Godzińska

O książce *Różnym głosem. Rodziny z wyboru w Polsce*

Rodzina jest jednym z tych pojęć, które w związku ze zmianami społeczno-kulturowymi wymagają redefinicji – podobnie jak macierzyństwo czy ojcostwo. Triadą tą w swojej książce *Różnym głosem. Rodziny z wyboru w Polsce* zajęły się badaczki: Joanna Mizielińska, Justyna Struzik, Agnieszka Król. Praca jest rezultatem projektu *Rodziny z wyboru w Polsce*, finansowanego ze środków na naukę w latach 2013–2016, realizowanego w Instytucie Psychologii

Polskiej Akademii Nauk pod kierownictwem dr hab. Joanny Mizielińskiej. Publikacja ta stanowi odpowiedź na zmiany dotyczące zagadnienia rodziny, która dziś zdecydowanie bardziej opiera się na indywidualnym wyborze, i takiej też umowie, niż formalnym kontrakcie. Autorki, bazując na wywiadach z ponad 150 osobami, pokazują różnorodność konfiguracji rodzinnych i intymnych tworzonych przez osoby nieheteronormatywne.

Tytułowymi rodzinami z wyboru są więc rodziny LGBT, w których „prymat więzów krwi jest zastępowany więziami opartymi na faktycznej praktyce społecznej – to nie biologiczne powiązania będą definiować granice tego, co jest rozumiane pod pojęciem rodziny, ale właśnie codzienne tworzenie rodziny” (s. 17). Najliczniej reprezentowaną grupą uczestniczącą w badaniu są nieheteroseksualni rodzice, drugą – dzieci wychowywane przez rodziców LGBT. Trzecią stanowią osoby powyżej 55 roku życia żyjące w związku homoseksualnym przynajmniej rok, ostatnią zaś – członkowie rodzin pochodzenia osób LGBT.

Książkę tworzy siedem tematycznych rozdziałów zakończonych podsumowaniem. Pierwszy jest wstępem, w którym znajduje się nie tylko teoretyczny zarys problemu oraz założenia metodologiczne, ale także zapis przebiegu rekrutacji oraz problemów etycznych, z jakimi borykały się autorki podczas często trudnych rozmów z uczestniczkami i uczestnikami badań. Nie bez znaczenia jest ogromna wiedza i doświadczenie badaczek, od lat zajmujących się szeroko pojętymi zagadnieniami *gender* i *queer*.

Na rozdział drugi – *Macierzyństwo w rodzinach z wyboru* – składają się rozmowy z lesbijkami, które są albo matkami biologicznymi, albo społecznymi. Rodziny tworzone przez kobiety nieheteronormatywne autorki nazywają rekonstruowanymi (gdy kobieta wchodzi w związek z kobietą posiadającą już dziecko) lub planowanymi (gdy para planuje dziecko, będąc już w związku). W badaniu wzięły udział także kobiety, których rodziny wykraczają poza ten podział. Badaczki przyjrzały się najważniejszym kwestiom związanym z byciem lesbijską matką: strategiom rodzicielskim, codziennym praktykom rodzin, jawności wobec dzieci, sposobom nazywania rodziny i kobiet ją tworzących, obecności (lub nieobecności) ojca, relacjom w rodzinie pochodzenia, ale także problemom w kontakcie z instytucjami. Istotnym problemem dla każdej z osób, zauważalnym we wszystkich wywiadach, jest brak uregulowań prawnych i wynikająca z tego faktu niepewność dotycząca przyszłości rodziny.

Nieheteroseksualnym ojcom poświęcony jest trzeci rozdział. To temat jeszcze mocnej tabuizowany niż macierzyństwo lesbijek. Autorki we wstępie do tej części podkreśliły trudność, jaką napotkały podczas znalezienia grupy badawczej. Materiał poddany analizie jest więc tu zdecydowanie mniejszy. Wśród mężczyzn biorących udział w badaniu znaleźli się zarówno ci, którzy żyją w pewnej jawności, jak i tacy, którzy ukrywają swoją tożsamość gejoską. Nie ma tu jednak ojców, którzy mają dzieci poprzez surogację lub adopcję, co wynika z braku dostępności tych metod w kraju. Sposoby na bycie gejoskim ojcem w Polsce są niezwykle różnorodne, ale jednocześnie słabo zakorzenione. To często życie w ukryciu (w małżeństwie), a w innych wypadkach – ojcostwo ma raczej charakter wspierający (mężczyzna nie jest na co dzień obecny w życiu swojego dziecka).

Interesującą częścią książki jest rozdział *Rodziny z wyboru w perspektywie dzieci*, w którym głos oddano najmłodszym. Co istotne – sposób przeprowadzania wywiadów został dopasowany do wieku poddanych badaniu dzieci. Mimo zróżnicowanego podejścia metodologicznego w poszczególnych grupach każda rozmowa zawierała kilka elementów wspólnych, między innymi pytania o codzienne praktyki rodzinne, kontakt z rówieśnikami czy relacje z rodzinami pochodzenia rodziców. Najbardziej widoczny wniosek płynący z wywiadów dotyczy wzrostu świadomości homofobii wraz z wiekiem badanych dzieci. Młodsze nie zauważają jeszcze specyfiki swojej rodziny. Starsze zaś, świadome tego, często same podejmują strategię ukrywania prawdy o rodzinie przed rówieśnikami w obawie przed odrzuceniem przez środowisko koleżeńskie. Ważną częścią tego rozdziału jest także narracja dzieci, które nagle dowiedziały się o orientacji seksualnej rodzica, a ich życie rodzinne zmieniło się diametralnie.

Dwa kolejne rozdziały poświęcone są rodzinom pochodzenia rodziców nieheteronormatywnych. Uczestnikami badania stali się rodzice i rodzeństwo osób LGBT. W rozmowach ze starszym pokoleniem widać, jak ogromna zmiana zaszła w postrzeganiu

osób LGBT w Polsce w ostatnim ćwierćwieczu, której najważniejszym elementem jest wprowadzenie tematyki homoseksualnej do dyskursu publicznego. Doskonale pokazuje to wypowiedź Hani (64 lata), matki 41-letniej córki: „Proszę nam wyjaśnić, skąd to się bierze, tak z ciekawości byśmy chcieli wiedzieć? Kiedyś nic takiego nie było, nie było w żadnych pokoleniach” (s. 244).

Badaczki, jako ważny moment w relacji osób LGBT z rodzicami, wskazały ich *coming out*. Dla ojców i matek zazwyczaj jest to wiadomość wymuszająca na nich zmierzenie się z własną homofobią. Została tu przedstawiona perspektywa obecnych i potencjalnych dziadków, ale także osób, które stereotypowo postrzegają osoby homoseksualne jako niemogące być rodzicami.

Wyjawienie swojej tożsamości seksualnej to także ważny moment w relacji z rodzeństwem. Warto jednak zaznaczyć, że w wywiadach wzięty udział osoby akceptujące nieheteroseksualność brata lub siostry i to one często odgrywały rolę powierników czy tłumaczy w kontakcie pomiędzy rodzeństwem a rodzicami. Obie badane grupy – rodziców i rodzeństwa – wskazywały odczuwany lęk o bliskich w kontekście homofobii.

Ostatni rozdział oddaje głos tym, którzy rzadko występują w badaniach dotyczących osób LGBT w Polsce – seniorkom i seniorom, czyli osobom powyżej pięćdziesiątego piątego roku życia oraz ich rodzinom. Jest to jedna z najbardziej niewidocznych grup społecznych, narażona na wykluczenie nie tylko z powodu wieku, tożsamości seksualnej, płci. Odrzucenie spotyka takie osoby zarówno w środowisku lesbijsko-gejowskim, ale i wśród ludzi starszych. Dla badaczek istotne jest tło społeczno-kulturowe w czasie, kiedy rozmówczynie i rozmówcy wchodzili w dorosłość – to bowiem czas, kiedy homoseksualizm był mocno tabuizowany, co często doprowadzało do zaprzeczenia, odrzucenia tożsamości i wchodzenia w role społeczne z nią niezgodne. Ciekawym aspektem tych rozmów jest też autoprezentacja osób badanych, które często

unikają nazywania siebie lesbijką/gejem. Ponadto – tak jak w każdej z poprzednich – tak i w tej części pojawia się postulat zmiany sytuacji osób LGBT, pragnienie regulacji prawnej. Tu osadzone jest ono jednak dodatkowo w kontekście lęku przed starością, chorobą, zniedołężnieniem, samotnością.

Książkę kończy podsumowanie, które systematyzuje zebrany materiał w oparciu o zagadnienia pojawiające się we wszystkich grupach: migracje, przemoc i dyskryminacja, kontakty z innymi rodzinami LGBT, dobro dziecka, jawność, normalność, postulat zmiany. Usystematyzowaniu wiedzy pomaga także zamieszczony w pracy słowniczek.

Różnym głosem. Rodziny z wyboru w Polsce to pozycja bardzo ważna i potrzebna. Pokazuje funkcjonowanie rodzin nieheteronormatywnych w kraju, którego większość społeczeństwa wyklucza istnienie tego rodzaju relacji. Autorki, poprzez wybór metodologii, ale także zapis emocji, jakie towarzyszą rozmówczynom i rozmówcom, pokazują zwyczajność takich rodzin, borykanie się z problemami rodzin tradycyjnych: wychowawczymi, związanymi z rozstaniem rodziców, chorobą jej członków. Jednocześnie jednak widoczny jest element szczególny, pojawiający się niemal w każdej wypowiedzi, który nie pozwala takim rodzinom żyć zwyczajnie – brak prawnych uregulowań. I właśnie dlatego pozycje takie jak ta są niezwykle ważne. Dzięki naukowemu aparatowi zapoznają czytelniczki i czytelników z faktami, obalającymi często narosłe wokół rodzin z wyboru mity.

J. Mizielińska, J. Struzik, A. Król, *Różnym głosem. Rodziny z wyboru w Polsce*, Warszawa: PWN 2017, 378 s.

Anna Godzińska

Wieloletnia nauczycielka języka polskiego w szkole podstawowej. Prowadzi literackie spotkania autorskie. Starsza referentka ds. przedsięwzięć edukacyjnych w Dziale Rozwoju i Promocji Zachodniopomorskiego Centrum Doskonalenia Nauczycieli.

Piszą dla nas

Adamczewska Jadwiga

Nauczycielka etyki i filozofii w XIV Liceum Ogólnokształcącym w Szczecinie.

Brzezicki Michał

Projektant graficzny, absolwent Akademii Sztuki w Szczecinie. Prezentował swoje prace na wystawach o zasięgu krajowym i międzynarodowym. Pracował jako nauczyciel zawodowy przedmiotów graficznych w szkołach policealnych, projektant wnętrz oraz grafik.

Budnicka Nikola

Nauczycielka matematyki w Szkole Podstawowej nr 47 im. Kornela Makuszyńskiego w Szczecinie.

Demby Agnieszka

Doktor nauk matematycznych. Specjalizuje się w dydaktyce matematyki. Pracuje w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego.

Godzińska Anna

Wieloletnia nauczycielka języka polskiego w szkole podstawowej. Prowadzi literackie spotkania autorskie. Starsza referentka ds. wspomagania szkół w Dziale Rozwoju i Promocji Zachodniopomorskiego Centrum Doskonalenia Nauczycieli.

Howil Waldemar

Nauczyciel języka polskiego, informatyki i etyki w Szkole Podstawowej nr 3 w Gryfie. Członek grupy „Superbelfrzy RP”.

Iwasiów Sławomir

Doktor nauk humanistycznych, literaturoznawca, krytyk literacki. Adiunkt w Instytucie Literatury i Nowych Mediów na Wydziale Humanistycznym Uniwersytetu Szczecińskiego. Od 2008 roku redaktor prowadzący Zachodniopomorskiego Dwumiesięcznika Oświatowego „Refleksje”.

Kędzierska Natalia

Nauczycielka matematyki w V Liceum Ogólnokształcącym z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Adama Asnyka w Szczecinie.

Kołodziejczyk Jerzy

Dyrektor Szkoły Podstawowej nr 4 im. I Samodzielnej Warszawskiej Brygady Kawalerii w Gryficach.

Kondracka-Zielińska Anna

Doktor nauk humanistycznych, literaturoznawczyni. Nauczycielka języka polskiego w I Liceum Ogólnokształcącym im. Marii Skłodowskiej-Curie w Szczecinie. Nauczycielka konsultantka ds. nauczania języka polskiego w szkołach ponadpodstawowych w Zachodniopomorskim Centrum Doskonalenia Nauczycieli.

Król Marta

Nauczycielka wychowania przedszkolnego w Przedszkolu Niepublicznym KACPER w Załomiu.

Makles Krzysztof

Doktor nauk technicznych w dziedzinie informatyki. Pracownik Wydziału Informatyki Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego w Szczecinie oraz V Liceum Ogólnokształcącego z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Adama Asnyka w Szczecinie. Autor publikacji naukowych z zakresu optymalizacji systemów. Prywatnie producent muzyki elektronicznej i fan Star Treka.

Milewska Krystyna

Historyk, starszy kustosz, kierownik Działu Edukacji Muzeum Narodowego w Szczecinie. Sekretarz naukowy Olimpiady Artystycznej – sekcja historii sztuki, okręg zachodniopomorski. W swojej pracy łączy kompetencje i zamięłowania do historii i turystyki. Autorka wielu konspektów lekcji i warsztatów oraz konkursów muzealnych, a także artykułów z zakresu edukacji muzealnej. Realizuje autorskie programy edukacyjne: „Akademia Brzdąca”, „Akademia Antyczna”, „Akademia Podróżnika” i inne. Należy do Stowarzyszenia Muzealników Polskich oraz Stowarzyszenia Historyków Sztuki.

Misiak Beata

Nauczycielka konsultantka ds. nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w Zachodniopomorskim Centrum Doskonalenia Nauczycieli.

Osiński Sławomir

Absolwent polonistyki, zarządzania w oświacie oraz marketingu i zarządzania w ochronie zdrowia. Nauczyciel, publicysta kulinarny i społeczny, rysownik satyryczny, czasem literat i tekściarz. Dyrektor Szkoły Podstawowej nr 47 im. Kornela Makuszyńskiego w Szczecinie.

Przeobrażńska Joanna

Nauczycielka języka polskiego w XIV Liceum Ogólnokształcącym z Oddziałami Dwujęzycznymi w Szczecinie.

Roszak Małgorzata

Nauczycielka języka polskiego w Szkole Podstawowej nr 48 im. Kawalerów Orderu Uśmiechu w Szczecinie. Nauczycielka konsultantka ds. języka polskiego w szkołach podstawowych w Zachodniopomorskim Centrum Doskonalenia Nauczycieli. Przewodnicząca szczecińskiego oddziału Stowarzyszenia Nauczycieli Polonistów.

Rusinek Wojciech

Doktor nauk humanistycznych, literaturoznawca, krytyk literatury. Nauczyciel języka polskiego w II Liceum Ogólnokształcącym z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marii Konopnickiej w Katowicach. Redaktor dwutygodnika kulturalnego „artPAPIER”

Sobczak Iwona

Nauczycielka informatyki w Szkole Podstawowej im. Kornela Makuszyńskiego w Kaliszu Pomorskim.

Sterzewska Anna

Z wykształcenia ekonomistka. Od ponad 3 lat prowadzi firmę korepetycyjną „Nauka Marzeń”. Na Facebooku założyła grupę „Wizualna Matematyka”, która zrzesza ponad 5000 osób. Ambasadorka książki Kamili Rowińskiej *Kobieta Asertywna*.

Szostak Klaudia

Nauczycielka języka polskiego w Szkole Podstawowej nr 53 im. Fryderyka Chopina w Szczecinie.

Szurek Michał

Doktor habilitowany w dziedzinie matematyki, popularyzator nauki, publicysta, profesor. W 1968 roku ukończył studia na Uniwersytecie Warszawskim. Emerytowany pracownik naukowy i wykładowca tej uczelni. Jego główna specjalność badawcza to geometria algebraiczna. Laureat nagrody imienia Samuela Dicksteina Polskiego Towarzystwa Matematycznego za działalność na rzecz matematyki (2004). Opublikował między innymi: *Opowieści matematyczne* (1987), *Opowieści geometryczne* (1995), *Z komputerem przez matematykę* (1995), *Matematyka dla humanistów* (2000), *Matematyka przy kominku* (2008), *Gawędy matematyczne na każdy dzień miesiąca* (2012), a także ośmiotomowy cykl wykładów: *O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów* (2006).

Szymaniak Jadwiga

Doktor nauk humanistycznych w zakresie pedagogiki, polonistka, długoletnia nauczycielka języka polskiego, emerytowana nauczycielka akademicka Gdańskiej Wyższej Szkoły Humanistycznej. Autorka książek, między innymi *Pedagogiki szkolnej* (2013).

Turnau Stefan

Doktor habilitowany w zakresie dydaktyki matematyki. Naukowo związany z Uniwersytetem Pedagogicznym im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie. Autor wielu publikacji książkowych i artykułów naukowych w obszarze dydaktyki matematyki. Opublikował między innymi książki: *Rola podręcznika w kształceniu pojęć i rozumowań matematycznych na poziomie pierwszej klasy ponadpodstawowej* (1978), *Logiczny wstęp do matematyki* (1974, 1984), *Wykłady o nauczaniu matematyki* (1990), *Cabri i czworokąty* (1994). Autor oraz współautor podręczników do nauczania matematyki.

Wołoszyk-Brzezińska Justyna

Dyplomowana nauczycielka języka polskiego w Prywatnej Szkole Podstawowej „Prymus” w Kościerzynie. Ukończyła polonistykę oraz Podyplomowe Studium Dziennikarstwa na Uniwersytecie Gdańskim. Należy do sieci współpracy i samokształcenia nauczycieli pracujących kreatywnie KRET (Kreatywny Rozwój Edukacji Twórczej) działającej w Centrum Edukacji Nauczycieli w Gdańsku. Jest Certyfikowanym Trenerem Odysei Umysłu. Autorka artykułów do „Edukacji Pomorskiej”.

Zakrzewska Ewa

Nauczycielka edukacji wczesnoszkolnej w Szkole Podstawowej nr 1 w Stargardzie.

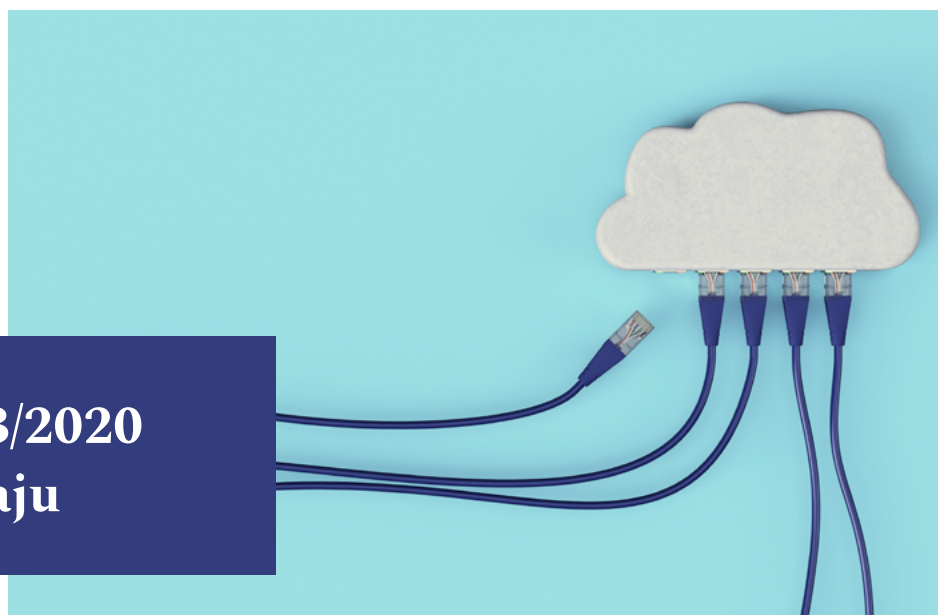
Żeromska Anna K.

Doktor habilitowana w dziedzinie matematyki, profesor Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie, dydaktyk matematyki. Naukowo zajmuje się przede wszystkim antropomatematycznym (humanistycznym i społecznym) ujęciem matematyki szkolnej. Autorka wielu książek oraz artykułów w czasopismach naukowych. Opublikowała między innymi monografię: *Metodologia matematyki jako przedmiot badań antropomatematycznych* (2013).

Refleksje

Zachodniopomorski Dwumiesięcznik Oświatowy

**Numer 3/2020
już w maju**



Temat numeru

**Kompetencje
cyfrowe**

